IV Ecart-type

valeurs x_i	x_1	x_2	x_3	etc…
effectifs n_i	n_1	n_2	n_3	

Une série statistique de valeurs x_i …

IV Ecart-type

valeurs x_i	x_1	x_2	x_3	etc…
effectifs n_i	n_1	n_2	n_3	

Une série statistique de valeurs x_i différentes est résumée par :

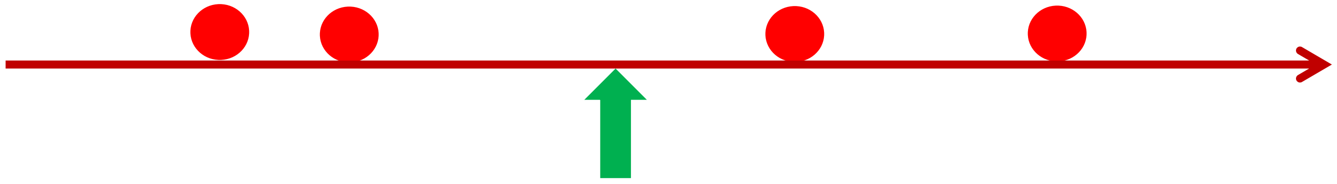
…

IV Ecart-type

valeurs x_i	x_1	x_2	x_3	etc…
effectifs n_i	n_1	n_2	n_3	

Une série statistique de valeurs x_i différentes

est résumée par :



une moyenne

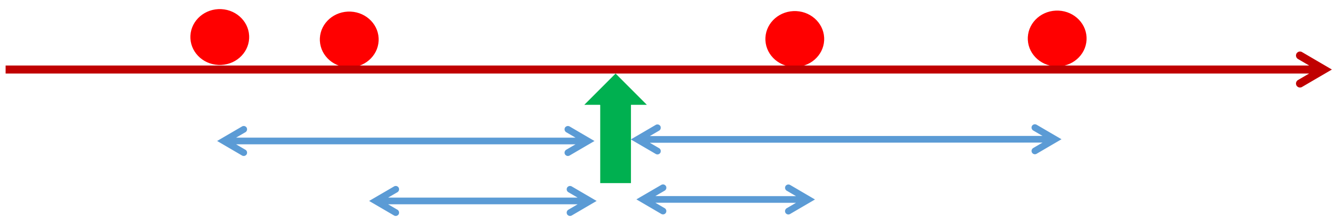
et …

IV Ecart-type

valeurs x_i	x_1	x_2	x_3	etc…
effectifs n_i	n_1	n_2	n_3	

Une série statistique de valeurs x_i différentes

est résumée par :



une moyenne μ

indicateur de position

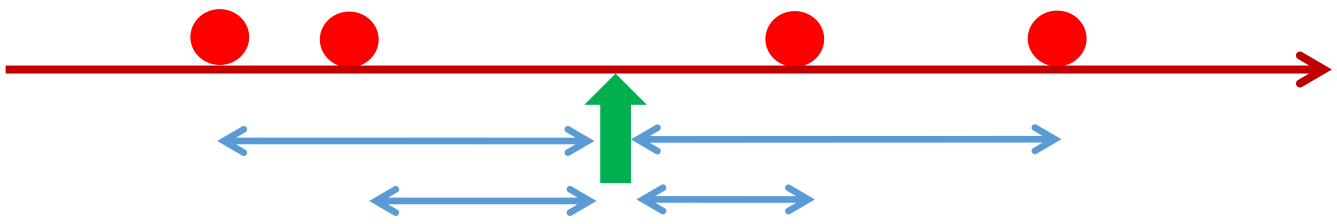
et un écart moyen (moyenne de tous les écarts de chaque valeur par rapport à la moyenne).

IV Ecart-type

valeurs x_i	x_1	x_2	x_3	etc…
effectifs n_i	n_1	n_2	n_3	

Une série statistique de valeurs x_i différentes

est résumée par :



une moyenne µ

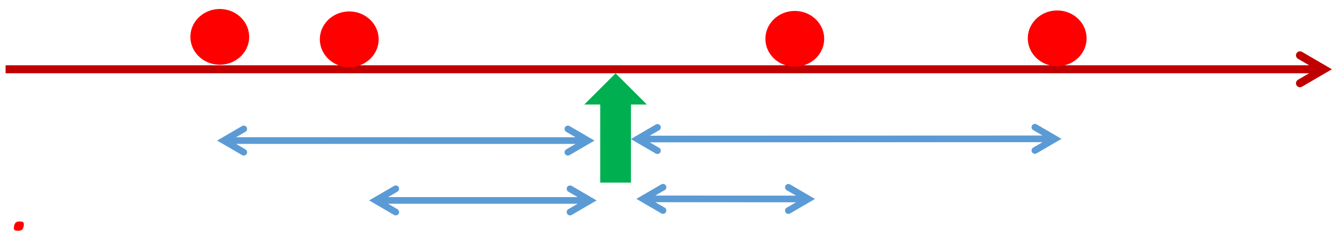
indicateur de position

et un écart moyen (moyenne de tous les écarts de chaque valeur *par rapport à la moyenne*).

indicateur de dispersion

Une série statistique de valeurs x_i différentes

est résumée par :



une moyenne μ

indicateur de position

et un écart moyen (moyenne de tous les écarts de chaque valeur par rapport à la moyenne).

indicateur de dispersion

Il est nommé écart-type et noté σ.

σ *correspond* à l'écart moyen,

sans lui être *égal* en valeur numérique exacte.

valeurs x_i	x_1	x_2	x_3	etc...
effectifs n_i	n_1	n_2	n_3	

N effectif total

moyenne μ

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \mu)^2 + n_2(x_2 - \mu)^2 + \text{etc...}}{N}}$$

valeurs x_i	x_1	x_2	x_3	etc...
effectifs n_i	n_1	n_2	n_3	

N effectif total   moyenne μ

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \mu)^2 + n_2(x_2 - \mu)^2 + \text{etc...}}{N}}}$$

que l'on peut écrire $\sigma = \sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - \mu)^2}{N}}$

Σ signifie *somme pour tous les i*

valeurs x_i	x_1	x_2	x_3	etc…
effectifs n_i	n_1	n_2	n_3	

N effectif total moyenne μ

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1-\mu)^2 + n_2(x_2-\mu)^2 + \text{etc...}}{N}}}$$

2ème formule : $\sigma = \sqrt{\dfrac{n_1 x_1^{\,2} + n_2 x_2^{\,2} + \ldots + n_t x_t^{\,2}}{N} - \mu^2}$

Linéarité de l'écart-type : (et rappel sur la moyenne)

Lorsqu'on ajoute un même nombre k à toutes les valeurs x_i d'une série statistique, alors l'écart-type est le même.

$$\boxed{\text{si} \quad x'_i = x_i + k \quad \text{pour tous les } i \Longrightarrow \sigma' = \sigma}$$

(et $\mu' = \mu + k$)

Lorsqu'on multiplie toutes les valeurs x_i d'une série statistique par un même nombre k, alors l'écart-type est multiplié par $|k|$.

$$\boxed{\text{si} \quad x'_i = x_i \times k \quad \text{pour tous les } i \Longrightarrow \sigma' = \sigma \times |k|}$$

(et $\mu' = \mu \times k$)

Démonstration : $x'_i = x_i + k$ pour tous les i

$$\sigma' = \sqrt{\frac{n_1 (x'_1 - \mu')^2 + n_2 (x'_2 - \mu')^2 + \text{etc...}}{N}}$$

Démonstration : $x'_i = x_i + k$ pour tous les i

$$\sigma' = \sqrt{\frac{n_1 (x'_1 - \mu')^2 + n_2 (x'_2 - \mu')^2 + \text{etc...}}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{n_1 (x_1 + k - (\mu+k))^2 + n_2 (x_2 + k - (\mu+k))^2 + \text{etc...}}{N}}$$

Démonstration : $x'_i = x_i + k$ pour tous les i

$$\sigma' = \sqrt{\frac{n_1 (x'_1 - \mu')^2 + n_2 (x'_2 - \mu')^2 + \text{etc...}}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{n_1 (x_1 + k - \mu - k)^2 + n_2 (x_2 + k - \mu - k)^2 + \text{etc...}}{N}}$$

Démonstration : $x'_i = x_i + k$ pour tous les i

$$\sigma' = \sqrt{\frac{n_1(x'_1 - \mu')^2 + n_2(x'_2 - \mu')^2 + \text{etc...}}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \mu)^2 + n_2(x_2 - \mu)^2 + \text{etc...}}{N}} = \sigma$$

Démonstration : $x'_i = x_i \times k$ pour tous les i

$$\sigma' = \sqrt{\frac{n_1(x'_1 - \mu')^2 + n_2(x'_2 - \mu')^2 + \text{etc...}}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{n_1(x_1 \times k - (\mu \times k))^2 + n_2(x_2 \times k - (\mu \times k))^2 + \text{etc...}}{N}}$$

Démonstration : $x'_i = x_i \times k$ pour tous les i

$$\sigma' = \sqrt{\frac{n_1(x'_1 - \mu')^2 + n_2(x'_2 - \mu')^2 + \text{etc...}}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{n_1(k(x_1 - \mu))^2 + n_2(k(x_2 - \mu))^2 + \text{etc...}}{N}}$$

Démonstration : $x'_i = x_i \times k$ pour tous les i

$$\sigma' = \sqrt{\frac{n_1 (x'_1 - \mu')^2 + n_2 (x'_2 - \mu')^2 + \text{etc...}}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{n_1 k^2 (x_1 - \mu)^2 + n_2 k^2 (x_2 - \mu)^2 + \text{etc...}}{N}}$$

Démonstration : $x'_i = x_i \times k$ pour tous les i

$$\sigma' = \sqrt{\frac{n_1 (x'_1 - \mu')^2 + n_2 (x'_2 - \mu')^2 + \text{etc...}}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{k^2 \left(n_1 (x_1 - \mu)^2 + n_2 (x_2 - \mu)^2 + \text{etc...} \right)}{N}}$$

Démonstration : $x'_i = x_i \times k$ pour tous les i

$$\sigma' = \sqrt{\frac{n_1 (x'_1 - \mu')^2 + n_2 (x'_2 - \mu')^2 + \text{etc...}}{N}}$$

$$= \sqrt{k^2} \times \sqrt{\frac{n_1 (x_1 - \mu)^2 + n_2 (x_2 - \mu)^2 + \text{etc...} \quad)}{N}}$$

Démonstration : $x'_i = x_i \times k$ pour tous les i

$$\sigma' = \sqrt{\frac{n_1(x'_1 - \mu')^2 + n_2(x'_2 - \mu')^2 + \text{etc...}}{N}}$$

$$= \sqrt{k^2} \times \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \mu)^2 + n_2(x_2 - \mu)^2 + \text{etc...} \quad)}{N}}$$

$$= |k| \times \sigma$$

L’écart-type peut être déterminé par la calculatrice

…

L’écart-type peut être déterminé par la calculatrice

en valeur approchée

(ou en valeur exacte sans pouvoir le prouver).

Voir exo 3 pour le mode d’emploi.

Exo 12 :

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2

1°) Déterminez l'écart-type de la série

2°) Vérifiez avec la calculatrice.

3°) Comparez avec l'écart moyen.

4°) Commentez l'écart-type.

5°) Proposez une autre série y_i qui aurait les mêmes moyenne μ et écart-type σ.

1°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2

$$\text{moyenne } \mu = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{5(3) + 3(5) + 2(9)}{5 + 3 + 2} = \frac{48}{10} = 4{,}8$$

1°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2

moyenne $\mu = 4{,}8$

effectif total $N = 10$

écart-type

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \mu)^2 + n_2(x_2 - \mu)^2 + n_3(x_3 - \mu)^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{5\,(3 - 4{,}8)^2 + 3\,(5 - 4{,}8)^2 + 2\,(9 - 4{,}8)^2}{10}}$$

1°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2

moyenne $\mu = 4{,}8$

effectif total $N = 10$

écart-type

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \mu)^2 + n_2(x_2 - \mu)^2 + n_3(x_3 - \mu)^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{5\,(3 - 4{,}8)^2 + 3\,(5 - 4{,}8)^2 + 2\,(9 - 4{,}8)^2}{10}} = \sqrt{5{,}16}$$

1°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2

moyenne $\mu = 4{,}8$

effectif total $N = 10$

écart-type

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \mu)^2 + n_2(x_2 - \mu)^2 + n_3(x_3 - \mu)^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{5\,(3 - 4{,}8)^2 + 3\,(5 - 4{,}8)^2 + 2\,(9 - 4{,}8)^2}{10}} = \sqrt{5{,}16} \approx 2{,}3$$

1°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2

moyenne $\mu = 4{,}8$

effectif total $N = 10$

écart-type (avec la 2ème formule)

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + n_3x_3^2}{N} - \mu^2}$$

$$= \sqrt{\frac{5(3^2) + 3(5^2) + 2(9^2)}{10} - 4{,}8^2}$$

1°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2

moyenne $\mu = 4{,}8$

effectif total $N = 10$

écart-type (avec la 2ème formule)

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + n_3x_3^2}{N} - \mu^2}$$

$$= \sqrt{\frac{5(3^2) + 3(5^2) + 2(9^2)}{10} - 4{,}8^2} = \sqrt{\frac{282}{10} - 4{,}8^2} = \sqrt{5{,}16}$$

$$\approx 2{,}3$$

1°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2

moyenne $\mu = 4{,}8$

effectif total $N = 10$

écart-type (avec la 2ème formule)

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + n_3 x_3^2}{N} - \mu^2}$$

Σx^2 *de Casio*

$$= \sqrt{\frac{5(3^2) + 3(5^2) + 2(9^2)}{10} - 4{,}8^2} = \sqrt{\frac{282}{10} - 4{,}8^2} = \sqrt{5{,}16}$$

$$\approx 2{,}3$$

2°) Vérifiez avec la calculatrice.

Menu STAT

On rentre les x_i 3 ; 5 ; 9 en Liste 1 (par exemple).

On rentre les p_i 5 ; 3 ; 2 en Liste 2 (idem).

On indique à la machine où les x_i et p_i sont :
CALC puis SET puis 1VAR XListe en Liste 1
et 1Var Freq en Liste 2.

On lui demande d'analyser les données :

CALC puis 1Var.

On obtient $\mu \approx$ … $\sigma \approx$ …

On lit : $\overline{x} = 4.8$ ce sont : *valeur approchée (?) de* la moyenne

$\Sigma x = 48$ $\Sigma\, n_i\, x_i$ *utile pour la détermination exacte de la moyenne*

$\Sigma x^2 = 282$ $\Sigma\, n_i\, x_i^{\,2}$ *(inutile en 2nde)*

$x\sigma n = 2.27156333$ *valeur approchée (souvent) de* l'écart-type

$sx = 2.39443799$ *(inutile en 2nde)*

$n = 10$ l'effectif total de la série

minX = 3 la valeur la plus basse

Q1 = 3 le premier quartile

Med = 4 la médiane

Q3 = 5 le troisième quartile

maxX = 9 la valeur la plus haute

Mod = 3 le mode de la série

On lit : $\overline{x} = 4.8$ Vrai — *valeur approchée (parfois) de* la moyenne

$\Sigma x = 48$ — $\Sigma\, n_i\, x_i$ *utile pour la détermination exacte de la moyenne*

$\Sigma x^2 = 282$ — $\Sigma\, n_i\, x_i^{\,2}$ *(inutile en 2nde)*

$x\sigma n = 2.27156333$ Faux — *valeur approchée (souvent) de* l'écart-type

$sx = 2.39443799$ — *(inutile en 2nde)*

$n = 10$ — l'effectif total de la série

$minX = 3$ — la valeur la plus basse

$Q1 = 3$ — le premier quartile

$Med = 4$ — la médiane

$Q3 = 5$ — le troisième quartile

$maxX = 9$ — la valeur la plus haute

$Mod = 3$ — le mode de la série

2°) Vérifiez avec la calculatrice.

Menu STAT

On rentre les x_i 3 ; 5 ; 9 en Liste 1 (par exemple).

On rentre les p_i 5 ; 3 ; 2 en Liste 2 (idem).

On indique à la machine où les x_i et p_i sont :
CALC puis SET puis 1VAR XListe en Liste 1
et 1Var Freq en Liste 2.

On lui demande d'analyser les données :

CALC puis 1Var.

On obtient $\mu \approx$ **4,8** (ici $\mu =$ **4,8**) $\sigma \approx$ **2,3**

3°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2
écarts à μ			

moyenne $\mu = 4,8$

effectif total $N = 10$

écart-type $\sigma = \sqrt{5,16} \approx 2,3$

3°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2
écarts à μ	1,8	0,2	4,2

moyenne $\mu = 4,8$

effectif total $N = 10$

écart-type $\sigma = \sqrt{5,16} \approx 2,3$

$| x_1 - \mu | = | 3 - 4,8 | = 1,8$

$| x_2 - \mu | = | 5 - 4,8 | = 0,2$

$| x_3 - \mu | = | 9 - 4,8 | = 4,2$

3°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2
écarts à μ	1,8	0,2	4,2

moyenne $\mu = 4,8$

effectif total $N = 10$

écart-type $\sigma = \sqrt{5,16} \approx 2,3$

$| x_1 - \mu | = | 3 - 4,8 | = 1,8$

$| x_2 - \mu | = | 5 - 4,8 | = 0,2$

$| x_3 - \mu | = | 9 - 4,8 | = 4,2$

$$\text{écart moyen } E = \frac{5\,(1,8) + 3\,(0,2) + 2\,(4,2)}{10} = 1,8$$

3°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2
écarts à μ	1,8	0,2	4,2

moyenne $\mu = 4,8$

effectif total $N = 10$

écart-type $\sigma = \sqrt{5,16} \approx 2,3$

$| x_1 - \mu | = | 3 - 4,8 | = 1,8$

$| x_2 - \mu | = | 5 - 4,8 | = 0,2$

$| x_3 - \mu | = | 9 - 4,8 | = 4,2$

$$\text{écart moyen } E = \frac{5\,(1,8) + 3\,(0,2) + 2\,(4,2)}{10} = 1,8$$

$1,8 \approx 2,3$ On a bien écart-type $\sigma \approx$ écart moyen E

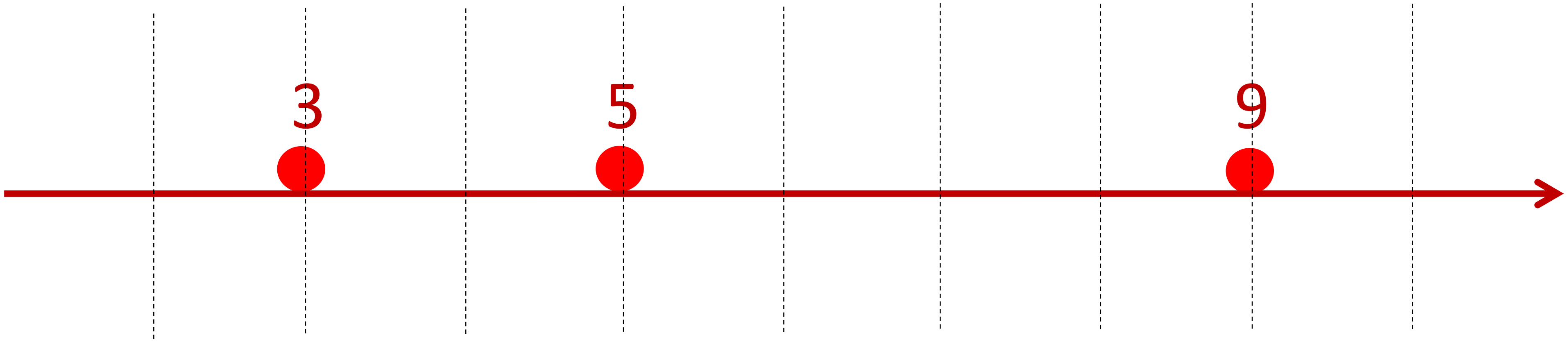
4°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2
écarts à μ	1,8	0,2	4,2

moyenne $\mu = 4,8$

effectif total $N = 10$

écart-type $\sigma = \sqrt{5,16} \approx 2,3$



Commentez l'écart-type.

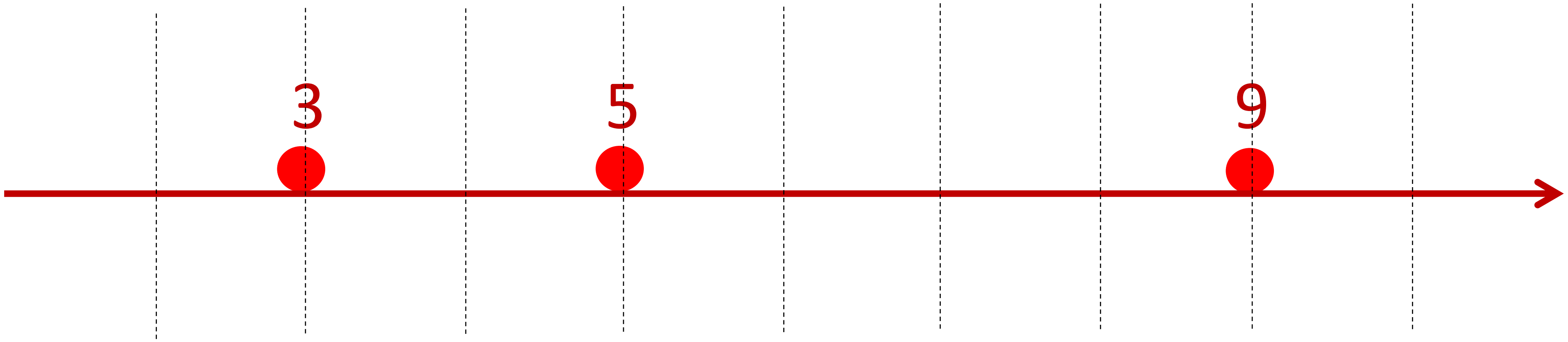
5°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2
écarts à μ	1,8	0,2	4,2

moyenne $\mu = 4,8$

effectif total $N = 10$

écart-type $\sigma = \sqrt{5,16} \approx 2,3$



écart-type σ = moyenne des écarts des valeurs x_i à la moyenne

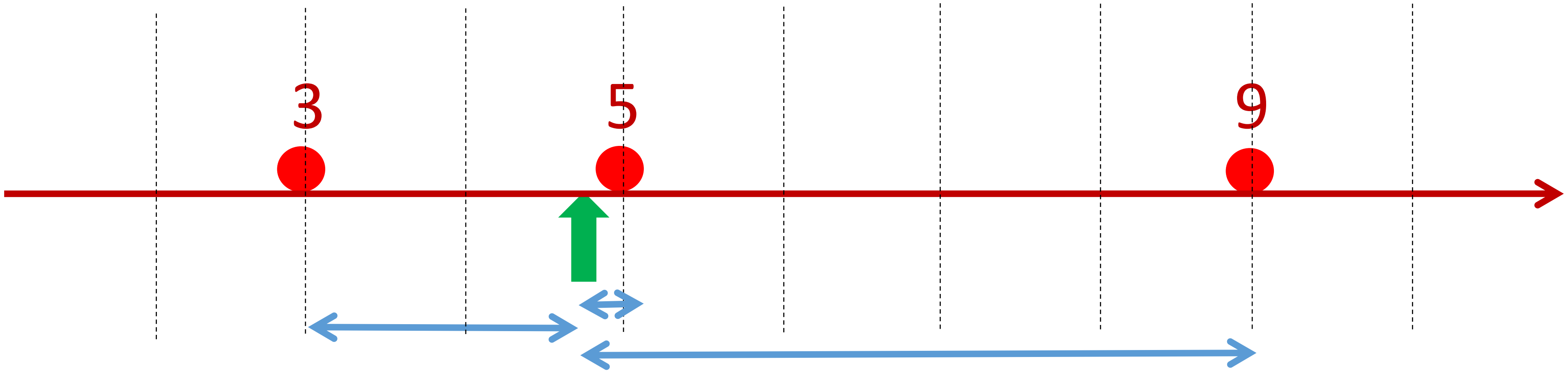
5°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2
écarts à μ	1,8	0,2	4,2

moyenne $\mu = 4,8$

effectif total $N = 10$

écart-type $\sigma = \sqrt{5,16} \approx 2,3$



écarts des valeurs x_i à la moyenne

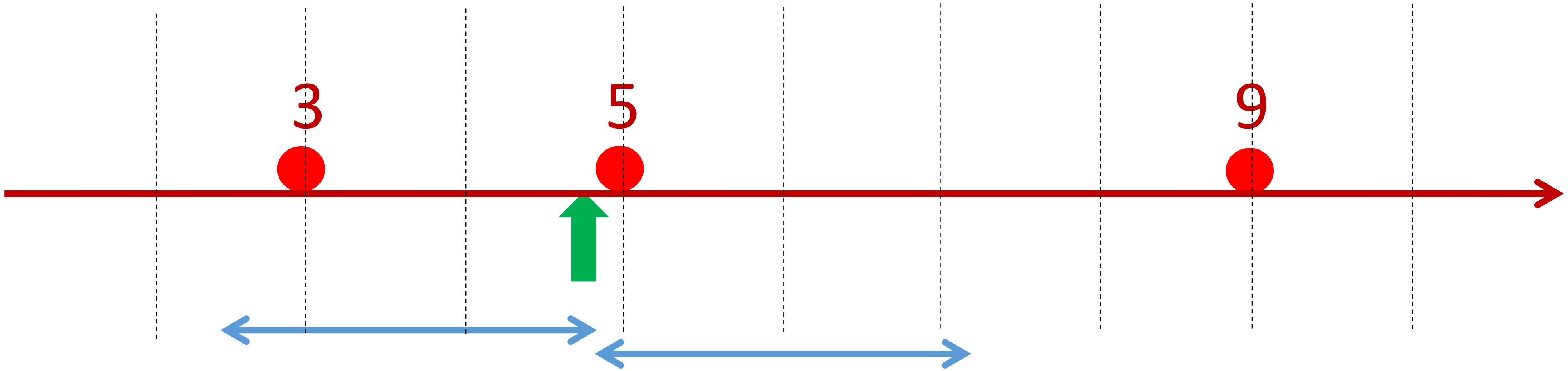
5°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2
écarts à μ	1,8	0,2	4,2

moyenne $\mu = 4,8$

effectif total $N = 10$

écart-type $\sigma = \sqrt{5,16} \approx 2,3$



écart-type σ = **moyenne** des écarts des valeurs x_i à la moyenne

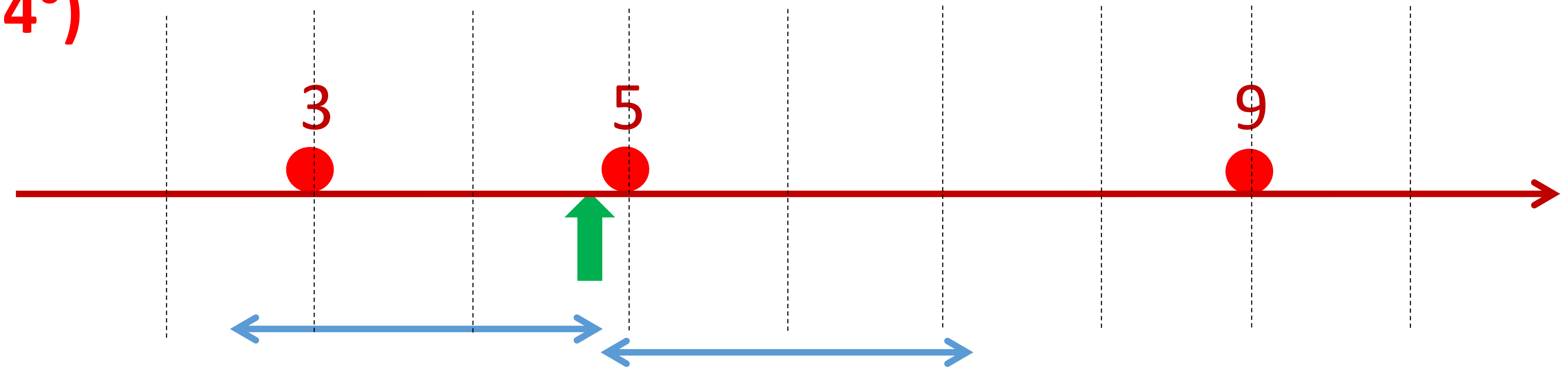
valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2
écarts à μ	1,8	0,2	4,2

moyenne $\mu = 4{,}8$

effectif total $N = 10$

écart-type $\sigma = \sqrt{5{,}16} \approx 2{,}3$

4°)



écart-type σ ≈ moyenne des écarts des valeurs x_i à la moyenne

En moyenne, les valeurs x_i

sont écartées de ≈ 2,3 de la moyenne 4,8.

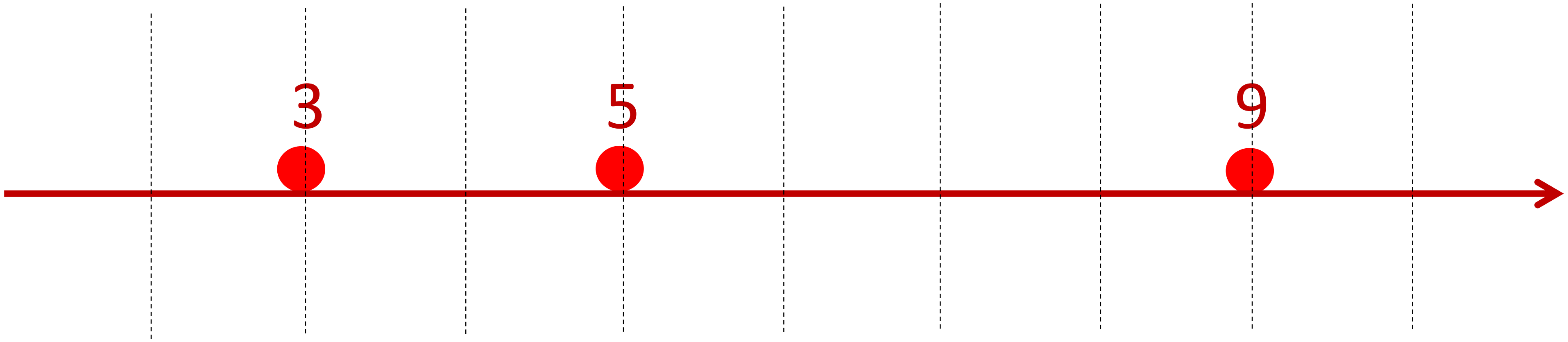
5°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2
écarts à μ	1,8	0,2	4,2

moyenne $\mu = 4,8$

effectif total $N = 10$

écart-type $\sigma = \sqrt{5,16} \approx 2,3$



Proposez une autre série y_i qui aurait les mêmes moyenne μ et écart-type σ.

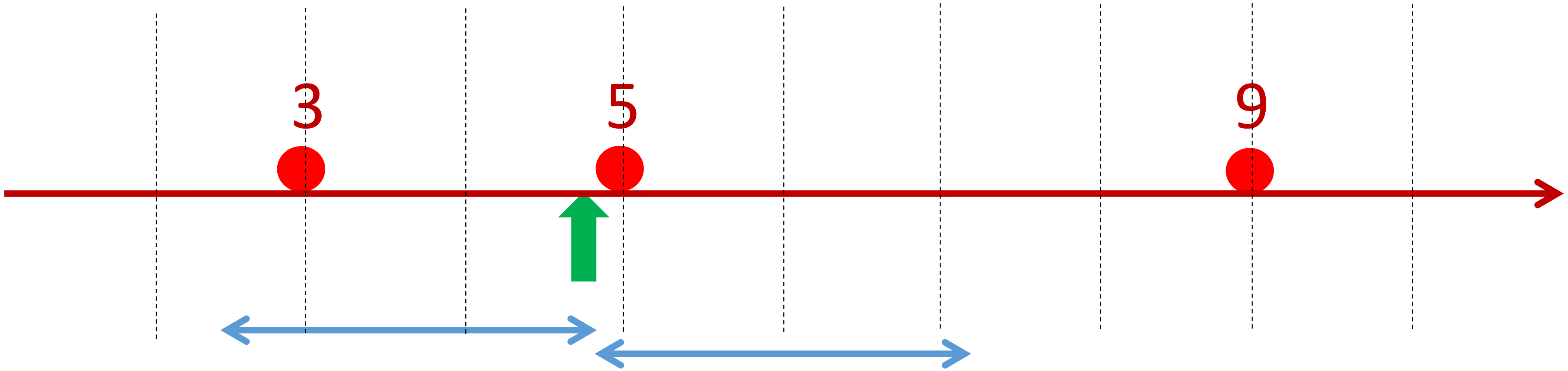
5°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2
écarts à μ	1,8	0,2	4,2

moyenne $\mu = 4,8$

effectif total $N = 10$

écart-type $\sigma = \sqrt{5,16} \approx 2,3$



En moyenne, les valeurs x_i sont écartées de ≈ 2,3 de la moyenne 4,8.

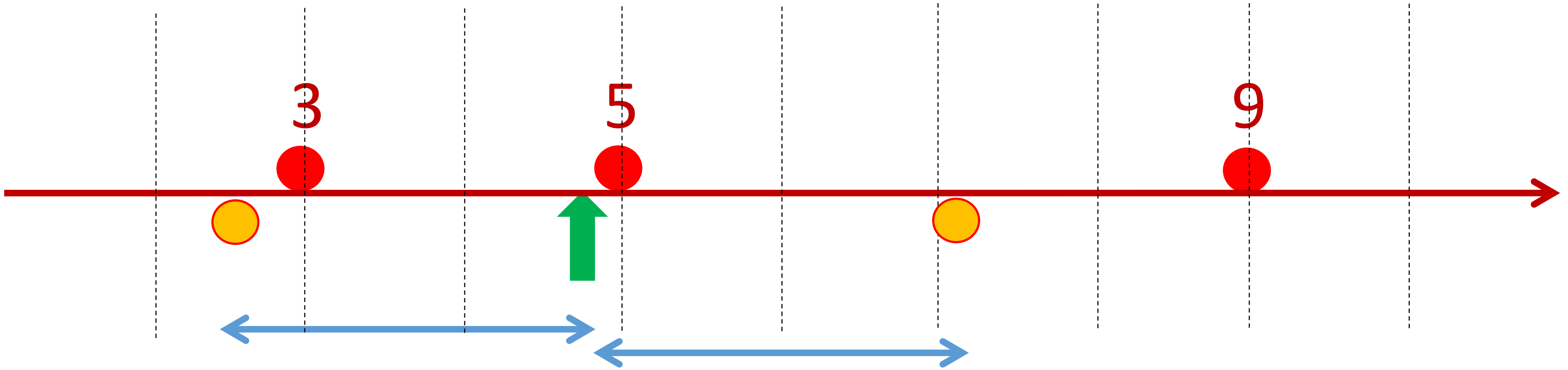
5°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2
écarts à μ	1,8	0,2	4,2

moyenne $\mu = 4,8$

effectif total $N = 10$

écart-type $\sigma = \sqrt{5,16} \approx 2,3$



En moyenne, les valeurs x_i

sont écartées de ≈ 2,3 de la moyenne 4,8.

série $y_1 \approx 4,8 - 2,3 = 2,5$ $y_2 \approx 4,8 + 2,3 = 7,1$

5°)

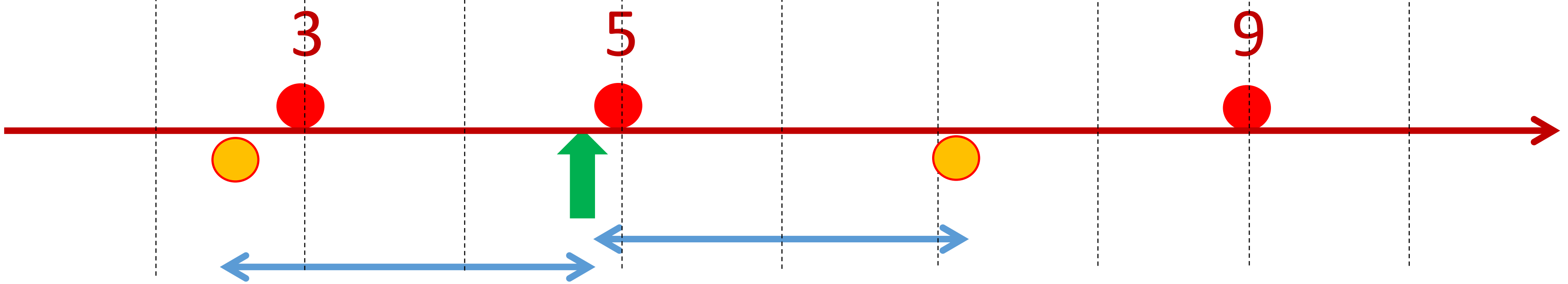
valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2
écarts à μ	1,8	0,2	4,2

moyenne $\mu = 4,8$

effectif total $N = 10$

écart-type $\sigma = \sqrt{5,16} \approx 2,3$

En moyenne, les valeurs x_i sont écartées de $\sigma \approx 2,3$ de la moyenne 4,8.



En moyenne, les valeurs y_i sont écartées de $\sigma \approx 2,3$ de la moyenne 4,8.

série $y_1 \approx 4,8 - 2,3$ $y_2 \approx 4,8 + 2,3$ valeurs approchées

$y_1 = \mu - \sigma$ $y_2 = \mu + \sigma$ valeurs exactes

exemple : 20 valeurs à ≈ 2,5 et 20 valeurs à ≈ 7,1

5°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2

valeurs y_i	$\mu - \sigma$	$\mu + \sigma$
effectifs n_i	1	1

Vérification : moyenne de la série y_i

$$\mu' = \frac{\Sigma\, n_i\, y_i}{\Sigma\, n_i} = \frac{1\,(\mu - \sigma) + 1\,(\mu + \sigma)}{1 + 1}$$

5°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2

valeurs y_i	$\mu - \sigma$	$\mu + \sigma$
effectifs n_i	1	1

Vérification : moyenne de la série y_i

$$\mu' = \frac{\Sigma\, n_i\, y_i}{\Sigma\, n_i} = \frac{1\,(\,\mu - \sigma\,) + 1\,(\,\mu + \sigma\,)}{1 + 1}$$

$$= \frac{\mu - \sigma + \mu + \sigma}{2} = \frac{2\mu}{2} = \mu$$

5°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2

valeurs y_i	$\mu - \sigma$	$\mu + \sigma$
effectifs n_i	1	1

écart-type de la série y_i

$$\sigma' = \sqrt{\frac{n_1(\,y_1 - \mu\,)^2 + n_2(\,y_2 - \mu\,)^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{1(\,(\mu - \sigma) - \mu\,)^2 + 1(\,(\mu + \sigma) - \mu\,)^2}{2}}$$

5°)

valeurs x_i	3	5	9
effectifs n_i	5	3	2

valeurs y_i	$\mu - \sigma$	$\mu + \sigma$
effectifs n_i	1	1

écart-type de la série y_i

$$\sigma' = \sqrt{\frac{1(\,(\mu - \sigma) - \mu\,)^2 + 1(\,(\mu + \sigma) - \mu\,)^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\,-\,\sigma\,)^2 + (\,\sigma\,)^2}{2}} = \sqrt{\frac{\sigma^2 + \sigma^2}{2}} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$$