XI Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
si et seulement si ils ont ...

XI Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.

co : même *linéarité* : ligne directrice.

Vocabulaire : on ne mélange pas les adjectifs :

les vecteurs sont colinéaires,

leurs directions sont parallèles.

Conséquence :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ...

puisque ... (voir chapitre « Les vecteurs ») :

Conséquence :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$

puisque le vecteur $k\,\vec{u}$ a été défini par (*voir paragraphe « Multiplication d'un vecteur par un réel»*) :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{même direction que } \vec{u} \\ \text{même sens si } k \geq 0 \qquad \text{sens opposé si } k \leq 0 \\ \| k\,\vec{u} \| = |k| \times \| \vec{u} \| \qquad |\,k\,| \text{ est la valeur absolue de } k \end{array}\right.$$

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Application :

les vecteurs $\vec{u}\,(1\,;3)$ et $\vec{v}\,(-2\,;-6)$ sont-ils colinéaires ?

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Application : $\vec{u}\,(1\,;3)$ et $\vec{v}\,(-2\,;-6)$ sont-ils colinéaires ?

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Application : $\vec{u}\,(1\,;3)$ et $\vec{v}\,(-2\,;-6)$ sont-ils colinéaires ?

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times 1 \\ -2\times 3 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = -2\,\vec{u}$ ⇒ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Application : $\vec{u}\,(1\,;3)$ et $\vec{v}\,(-2\,;-6)$ sont-ils colinéaires ?

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times1 \\ -2\times3 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = -2\,\vec{u}$ ⇒ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

Application 2 : $\vec{t}\,(-1\,;12)$ et $\vec{w}\,(0{,}33\,;-4)$ sont-ils colinéaires ?

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Application : $\vec{u}\,(1\,;3)$ et $\vec{v}\,(-2\,;-6)$ sont-ils colinéaires ?

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times1 \\ -2\times3 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = -2\,\vec{u}$ ⇨ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

Application 2 : $\vec{t}\,(-1\,;12)$ et $\vec{w}\,(0{,}33\,;-4)$ sont-ils colinéaires ?

⇔ existe-il un réel k tel que $\vec{t} = k\,\vec{w}$ ou $\vec{w} = k\,\vec{t}$?

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Application : $\vec{u}\,(1\,;3)$ et $\vec{v}\,(-2\,;-6)$ sont-ils colinéaires ?

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times1 \\ -2\times3 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = -2\,\vec{u} \Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

Application 2 : $\vec{t}\,(-1\,;12)$ et $\vec{w}\,(0{,}33\,;-4)$ sont-ils colinéaires ?

$\Leftrightarrow$ existe-il un réel k tel que $\vec{t} = k\,\vec{w}$ ou $\vec{w} = k\,\vec{t}$?

$$\vec{t} = k\vec{w} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 0{,}33 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Application : $\vec{u}\,(1\,;3)$ et $\vec{v}\,(-2\,;-6)$ sont-ils colinéaires ?

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times1 \\ -2\times3 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = -2\,\vec{u} \Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

Application 2 : $\vec{t}\,(-1\,;12)$ et $\vec{w}\,(0{,}33\,;-4)$ sont-ils colinéaires ?

$\Leftrightarrow$ existe-il un réel k tel que $\vec{t} = k\,\vec{w}$ ou $\vec{w} = k\,\vec{t}$?

$$\vec{t} = k\vec{w} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 0{,}33 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}33k \\ -4k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 0{,}33k \\ 12 = -4k \end{cases}$$

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$

Application : $\vec{u}\,(1\,;3)$ et $\vec{v}\,(-2\,;-6)$ sont-ils colinéaires ?

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times1 \\ -2\times3 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = -2\,\vec{u}$ ⇒ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

Application 2 : $\vec{t}\,(-1\,;12)$ et $\vec{w}\,(0{,}33\,;-4)$ sont-ils colinéaires ?

⇔ existe-il un réel k tel que $\vec{t} = k\,\vec{w}$ ou $\vec{w} = k\,\vec{t}$?

$$\vec{t} = k\vec{w} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 0{,}33 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}33k \\ -4k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 0{,}33k \\ 12 = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{-1}{0{,}33} \\ k = -3 \end{cases}$$

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$

Application : $\vec{u}\,(1\,;3)$ et $\vec{v}\,(-2\,;-6)$ sont-ils colinéaires ?

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times1 \\ -2\times3 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = -2\,\vec{u}$ ⇒ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

Application 2 : $\vec{t}\,(-1\,;12)$ et $\vec{w}\,(0{,}33\,;-4)$ sont-ils colinéaires ?

⇔ existe-il un réel k tel que $\vec{t} = k\,\vec{w}$ ou $\vec{w} = k\,\vec{t}$?

$$\vec{t} = k\vec{w} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 0{,}33 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}33k \\ -4k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 0{,}33k \\ 12 = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{-1}{0{,}33} \\ k = -3 \end{cases}$$

⇔ il n'existe pas de réel k

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Application : $\vec{u}\,(1\,;3)$ et $\vec{v}\,(-2\,;-6)$ sont-ils colinéaires ?

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times1 \\ -2\times3 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = -2\,\vec{u} \Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

Application 2 : $\vec{t}\,(-1\,;12)$ et $\vec{w}\,(0{,}33\,;-4)$ sont-ils colinéaires ?

$\Leftrightarrow$ existe-il un réel k tel que $\vec{t} = k\,\vec{w}$ ou $\vec{w} = k\,\vec{t}$?

$$\vec{t} = k\vec{w} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 0{,}33 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}33k \\ -4k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 0{,}33k \\ 12 = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{-1}{0{,}33} \\ k = -3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ il n'existe pas de réel k $\Leftrightarrow$ $\vec{t} \neq k\,\vec{w}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{t}$ et $\vec{w}$ non colinéaires

XI Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Remarque : si $\vec{u} = k\,\vec{v}$ et si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors ...

XI Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Remarque : si $\vec{u} = k\,\vec{v}$ et si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $k \neq 0$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

Donc on a alors $\vec{v} = \ldots$

XI Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Remarque : si $\vec{u} = k\,\vec{v}$ et si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $k \neq 0$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

Donc on a alors $\vec{v} = \dfrac{1}{k}\vec{u}$ donc on peut écrire $\vec{v} = k'\,\vec{u}$ avec $k' = \ldots$

XI Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Remarque : si $\vec{u} = k\,\vec{v}$ et si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $k \neq 0$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

Donc on a alors $\vec{v} = \frac{1}{k}\vec{u}$ donc on peut écrire $\vec{v} = k'\,\vec{u}$ avec $k' = \frac{1}{k}$

XI Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Remarque : si $\vec{u} = k\,\vec{v}$ et si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $k \neq 0$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

Donc on a alors $\vec{v} = \dfrac{1}{k}\vec{u}$ donc on peut écrire $\vec{v} = k'\,\vec{u}$ avec $k' = \dfrac{1}{k}$

Conclusion :

Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ il suffit d'avoir une seule des deux relations

$\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$ pour ...

XI Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Remarque : si $\vec{u} = k\,\vec{v}$ et si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $k \neq 0$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

Donc on a alors $\vec{v} = \dfrac{1}{k}\vec{u}$ donc on peut écrire $\vec{v} = k'\,\vec{u}$ avec $k' = \dfrac{1}{k}$

Conclusion :

Lorsque $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$ il suffit d'avoir une seule des deux relations $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$ pour avoir l'autre.

XI Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Remarque : si $\vec{u} = k\,\vec{v}$ et si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $k \neq 0$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

Donc on a alors $\vec{v} = \frac{1}{k}\vec{u}$ donc on peut écrire $\vec{v} = k'\,\vec{u}$ avec $k' = \frac{1}{k}$

Conclusion :

Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ il suffit d'avoir une seule des deux relations $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$ pour avoir l'autre.

Exemples :

$\vec{u} = 2\,\vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = \ldots$

$\vec{w} = -3\,\vec{t} \Leftrightarrow \vec{t} = \ldots$

XI Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Remarque : si $\vec{u} = k\,\vec{v}$ et si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $k \neq 0$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

Donc on a alors $\vec{v} = \dfrac{1}{k}\vec{u}$ donc on peut écrire $\vec{v} = k'\,\vec{u}$ avec $k' = \dfrac{1}{k}$

Conclusion :

Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ il suffit d'avoir une seule des deux relations $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$ pour avoir l'autre.

Exemples :

$\vec{u} = 2\,\vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = 0{,}5\,\vec{u}$

$\vec{w} = -3\,\vec{t} \Leftrightarrow \vec{t} = -\dfrac{1}{3}\vec{w}$

XI Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Les deux relations $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$ sont nécessaires dans la définition pour le cas où …

XI Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Les deux relations $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$ sont nécessaires dans la définition pour le cas où l'un des vecteurs est le vecteur nul :

Si $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $\vec{u} = k\,\vec{v}$ est … , et $\vec{v} = k\,\vec{u}$ est …

XI Colinéarité de deux vecteurs

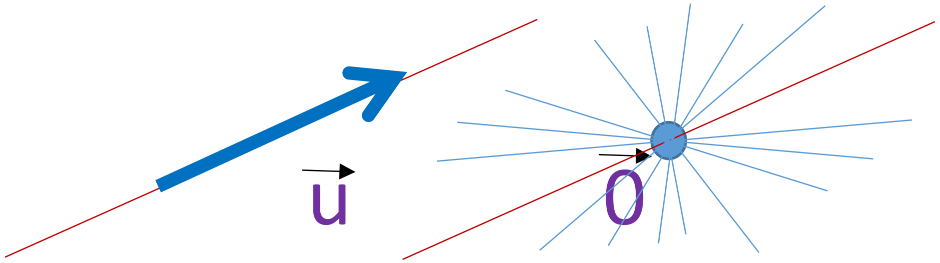
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Les deux relations $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$ sont nécessaires dans la définition pour le cas où l'un des vecteurs est le vecteur nul :

Si $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $\vec{u} = k\,\vec{v}$ est possible ($\vec{u} = \vec{0} = 0\,\vec{v}$), et $\vec{v} = k\,\vec{u}$ est impossible (puisque donne $\vec{v} = k\,\vec{0} = \vec{0}$ alors que $\vec{v} \neq \vec{0}$).

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} = \vec{0}$, c'est l'inverse.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$



Le vecteur nul $\vec{0}$ est défini uniquement par : sa longueur nulle. Il a une infinité de directions, et une double-infinité de sens.

On admet que **le vecteur nul** $\vec{0}$ est **toujours** colinéaire à tout autre vecteur, même un vecteur non nul qui n'a qu'une unique direction.

XII La colinéarité en Géométrie analytique
(avec des coordonnées dans un repère).

Soient $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ deux vecteurs et leurs coordonnées dans un repère.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x\,y' - x'\,y = 0$

XII La colinéarité en Géométrie analytique
(avec des coordonnées dans un repère).

Soient $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ deux vecteurs et leurs coordonnées dans un repère.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x y' - x' y = 0$

Démonstration :

XII La colinéarité en Géométrie analytique (avec des coordonnées dans un repère).

Soient $\vec{u}(x\,;\,y)$ et $\vec{v}(x'\,;\,y')$ deux vecteurs et leurs coordonnées dans un repère.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x\,y' - x'\,y = 0$

Démonstration : supposons d'abord que $\vec{v} \neq \vec{0}$

(car $\vec{u} = k\,\vec{v}$ est impossible lorsque $\vec{u} \neq \vec{0} = \vec{v}$)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$

donc $(x\,;\,y) = k\,(x'\,;\,y')$ donc …

XII La colinéarité en Géométrie analytique (avec des coordonnées dans un repère).

Soient $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ deux vecteurs et leurs coordonnées dans un repère.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x y' - x' y = 0$

Démonstration : supposons d'abord que $\vec{v} \neq \vec{0}$

(car $\vec{u} = k \vec{v}$ est impossible lorsque $\vec{u} \neq \vec{0} = \vec{v}$)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc il existe un réel k tel que $\vec{u} = k \vec{v}$

donc $(x ; y) = k (x' ; y')$ donc $(x ; y) = (k x' ; k y')$

donc …

XII La colinéarité en Géométrie analytique (avec des coordonnées dans un repère).

Soient $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ deux vecteurs et leurs coordonnées dans un repère.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x y' - x' y = 0$

Démonstration : supposons d'abord que $\vec{v} \neq \vec{0}$

(car $\vec{u} = k \vec{v}$ est impossible lorsque $\vec{u} \neq \vec{0} = \vec{v}$)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc il existe un réel k tel que $\vec{u} = k \vec{v}$

donc $(x ; y) = k (x' ; y')$ donc $(x ; y) = (k x' ; k y')$

donc $x = k x'$ et $y = k y'$

XII La colinéarité en Géométrie analytique (avec des coordonnées dans un repère).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x\,y' - x'\,y = 0$

Démonstration : supposons d'abord que $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$

donc $(x ; y) = k (x' ; y')$ donc $(x ; y) = (k x' ; k y')$

donc $x = k x'$ et $y = k y'$

on a alors $k = ...$ et ...

XII La colinéarité en Géométrie analytique (avec des coordonnées dans un repère).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x\,y' - x'\,y = 0$

Démonstration : supposons d'abord que $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$

donc $(x ; y) = k (x' ; y')$ donc $(x ; y) = (k x' ; k y')$

donc $x = k x'$ et $y = k y'$

on a alors $k = \dfrac{x}{x'}$ et ...

XII La colinéarité en Géométrie analytique (avec des coordonnées dans un repère).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x\,y' - x'\,y = 0$

Démonstration : supposons d'abord que $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$

donc $(x ; y) = k (x' ; y')$ donc $(x ; y) = (k x' ; k y')$

donc $x = k x'$ et $y = k y'$

on a alors $k = \dfrac{x}{x'}$ et … Est-ce toujours vrai ?

XII La colinéarité en Géométrie analytique
(avec des coordonnées dans un repère).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x\,y' - x'\,y = 0$

Démonstration : supposons d'abord que $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$

donc $(x ; y) = k (x' ; y')$ donc $(x ; y) = (k x' ; k y')$

donc $x = k x'$ et $y = k y'$

on a alors $k = \dfrac{x}{x'}$ si $x' \neq 0$

XII La colinéarité en Géométrie analytique (avec des coordonnées dans un repère).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x\,y' - x'\,y = 0$

Démonstration : supposons d'abord que $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$

donc $(x ; y) = k (x' ; y')$ donc $(x ; y) = (k\,x' ; k\,y')$

donc $x = k\,x'$ et $y = k\,y'$

on a alors $k = \dfrac{x}{x'}$ si $x' \neq 0$; $y = k\,y'$ devient …

XII La colinéarité en Géométrie analytique (avec des coordonnées dans un repère).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x\,y' - x'\,y = 0$

Démonstration : supposons d'abord que $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$

donc $(x ; y) = k (x' ; y')$ donc $(x ; y) = (k x' ; k y')$

donc $x = k x'$ et $y = k y'$

on a alors $k = \dfrac{x}{x'}$ si $x' \neq 0$; $y = k y'$ devient $y = \dfrac{x}{x'}\, y'$

puis …

XII La colinéarité en Géométrie analytique (avec des coordonnées dans un repère).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x\,y' - x'\,y = 0$

Démonstration : supposons d'abord que $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$

donc $(x ; y) = k (x' ; y')$ donc $(x ; y) = (k x' ; k y')$

donc $x = k x'$ et $y = k y'$

on a alors $k = \dfrac{x}{x'}$ si $x' \neq 0$; $y = k y'$ devient $y = \dfrac{x}{x'} y'$

puis $y x' = x y'$ puis …

XII La colinéarité en Géométrie analytique (avec des coordonnées dans un repère).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x\,y' - x'\,y = 0$

Démonstration : supposons d'abord que $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$

donc $(x ; y) = k (x' ; y')$ donc $(x ; y) = (k x' ; k y')$

donc $x = k x'$ et $y = k y'$

on a alors $k = \dfrac{x}{x'}$ si $x' \neq 0$; $y = k y'$ devient $y = \dfrac{x}{x'} y'$

puis $y x' = x y'$ puis $y\,x' - x\,y' = 0$

XII La colinéarité en Géométrie analytique (avec des coordonnées dans un repère).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x\,y' - x'\,y = 0$

Démonstration : supposons d'abord que $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$

donc $(x ; y) = k (x' ; y')$ donc $(x ; y) = (k x' ; k y')$

donc $x = k x'$ et $y = k y'$

on a alors $k = \dfrac{x}{x'}$ si $x' \neq 0$; $y = k y'$ devient $y = \dfrac{x}{x'} y'$

puis $y x' = x y'$ puis **$y x' - x y' = 0$** A-t-il été démontré ?

XII La colinéarité en Géométrie analytique (avec des coordonnées dans un repère).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x\,y' - x'\,y = 0$

Démonstration : supposons d'abord que $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$

donc $(x ; y) = k (x' ; y')$ donc $(x ; y) = (k x' ; k y')$

donc $x = k x'$ et $y = k y'$

on a alors $k = \dfrac{x}{x'}$ si $x' \neq 0$; $y = k y'$ devient $y = \dfrac{x}{x'}\,y'$

puis $y x' = x y'$ puis $y\,x' - x\,y' = 0$ A-t-il été démontré ? Non si $x' = 0$

XII La colinéarité en Géométrie analytique (avec des coordonnées dans un repère).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x\,y' - x'\,y = 0$

Démonstration : supposons d'abord que $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$

donc $x = k\,x'$ et $y = k\,y'$

Supposons $x' = 0$: on a alors $x = k\,x' = k\,0 = 0$ et $y = k\,y'$

$x\,y' - x'\,y = 0$ devient $0\,y' - 0\,y = 0$ qui reste toujours vraie.

Conclusion : on a démontré $x\,y' - x'\,y = 0$ dans tous les cas.

XII La colinéarité en Géométrie analytique
(avec des coordonnées dans un repère).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x\,y' - x'\,y = 0$

$x\,y' - x'\,y$ est appelé le déterminant

des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Que l'on note det ($\vec{u}$; $\vec{v}$) ou $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

XII La colinéarité en Géométrie analytique
(avec des coordonnées dans un repère).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x\,y' - x'\,y = 0$

$x\,y' - x'\,y$ est appelé le déterminant

des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$x\,y' - x'\,y$ *appelé ''produit en croix''*

Que l'on note $\det(\vec{u}\,;\vec{v})$ ou $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

Application :

Soient $\vec{u}(2 ; 12)$ et $\vec{v}(42 ; 252)$ dans un repère.

Démontrez par deux méthodes différentes qu’ils sont colinéaires, et déterminez la méthode finale à adopter.

Application :

Soient $\vec{u}(2 ; 12)$ et $\vec{v}(42 ; 252)$ dans un repère.

Démontrez par deux méthodes différentes qu'ils sont colinéaires, et déterminez la méthode finale à adopter.

1ère méthode : existe-t-il un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\,\vec{u}$?

2ème méthode : a-t-on $x'y - xy' = 0$?

3ème méthode : a-t-on deux droites directrices parallèles ?

Méthode inemployable (dans ce chapitre)

car c'est la <u>signification</u> de la colinéarité.

$\vec{u}(\ 2\ ;\ 12\ )$ et $\vec{v}\ (\ 42\ ;\ 252\ )$

1ère méthode : existe-t-il un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$?

$\vec{u}(\ 2\ ;\ 12\ )$ et $\vec{v}\ (\ 42\ ;\ 252\ )$

1ère méthode : existe-t-il un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 42 \\ 252 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}(\ 2\ ;\ 12\ )$ et $\vec{v}\ (\ 42\ ;\ 252\ )$

1ère méthode : existe-t-il un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \\ 12 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 42 \\ \\ 252 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42k \\ \\ 252k \end{pmatrix}$$

$\vec{u}(2\ ;12)$ et $\vec{v}(42\ ;252)$

1ère méthode : existe-t-il un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 42 \\ 252 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42k \\ 252k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 42k \\ 12 = 252k \end{cases}$$

$\vec{u}(\ 2\ ;\ 12\ )$ et $\vec{v}\ (\ 42\ ;\ 252\ )$

1ère méthode : existe-t-il un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 42 \\ 252 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42k \\ 252k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 42k \\ 12 = 252k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{2}{42} = \dfrac{2}{2\times 21} = \dfrac{1}{21} \\ k = \dfrac{12}{252} = \dfrac{12}{12\times 21} = \dfrac{1}{21} \end{cases}$$

$\vec{u}(\ 2\ ;\ 12\ )$ et $\vec{v}\ (\ 42\ ;\ 252\ )$

1ère méthode : existe-t-il un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 42 \\ 252 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42k \\ 252k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 42k \\ 12 = 252k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{2}{42} = \dfrac{2}{2\times 21} = \dfrac{1}{21} \\ k = \dfrac{12}{252} = \dfrac{12}{12\times 21} = \dfrac{1}{21} \end{cases} \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{21}$$

$\vec{u}(\ 2\ ;\ 12\ )$ et $\vec{v}\ (\ 42\ ;\ 252\ )$

1ère méthode : existe-t-il un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 42 \\ 252 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42k \\ 252k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 42k \\ 12 = 252k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{2}{42} = \dfrac{2}{2\times 21} = \dfrac{1}{21} \\ k = \dfrac{12}{252} = \dfrac{12}{12\times 21} = \dfrac{1}{21} \end{cases} \Leftrightarrow k = \frac{1}{21}$$

Oui, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$

$\vec{u} = \dfrac{1}{21}\,\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

$\vec{u}(2\,;12)$ et $\vec{v}(42\,;252)$ Autre possibilité

1ère méthode : existe-t-il un réel k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$?

$$\begin{pmatrix} 42 \\ 252 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 42 \\ 252 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ 12k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 42 = 2k \\ 252 = 12k \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k = \dfrac{42}{2} = 21 \\ k = \dfrac{252}{12} = 21 \end{array} \right. \Leftrightarrow k = 21$$

Oui, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$

$\vec{v} = 21\,\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v}$ et $\vec{u}$ colinéaires

$\vec{u}(2 ; 12)$ et $\vec{v} (42 ; 252)$

2ème méthode : a-t-on $x' y - x y' = 0$?

$\vec{u}(2 ; 12)$ et $\vec{v}(42 ; 252)$

2ème méthode : a-t-on $x' y - x y' = 0$?

$42 \times 12 - 252 \times 2 = 504 - 504 = 0$

$\Longleftrightarrow$ les vecteurs sont colinéaires.

$\vec{u}(2\,;\,12)$ et $\vec{v}\,(42\,;\,252)$

2ème méthode : a-t-on $x'\,y - x\,y' = 0$?

$42 \times 12 - 252 \times 2 = 504 - 504 = 0$

$\Leftrightarrow$ les vecteurs sont colinéaires.

Conclusion : la 1ère méthode nécessite …
alors que la 2ème méthode nécessite …
donc il faut adopter la …   méthode.

$\vec{u}(2\,;12)$ et $\vec{v}(42\,;252)$

2ème méthode : a-t-on $x'y - xy' = 0$?

$42 \times 12 - 252 \times 2 = 504 - 504 = 0$

$\Leftrightarrow$ les vecteurs sont colinéaires.

Conclusion : la 1ère méthode nécessite une résolution alors que la 2ème méthode nécessite un calcul, donc il faut adopter la 2ème méthode si l'on possède les coordonnées des deux vecteurs.