

Exercice 4

Soient les points $A(-1 ; -1)$, $B(2 ; -2)$ et $C(0 ; 2)$ dans un repère orthonormé.

1°) Le triangle ABC est-il isocèle ? Équilatéral ?
Rectangle ?

2°) Soit M le milieu de [BC]. Le triangle ABM est-il rectangle ?

3°) Est-il possible qu'un quadrilatère ABDC soit un losange ?

Si oui, déterminez le point D.

Que peut-on dire du quadrilatère ABDC ?

Exo 4 : Soient les points $A(-1 ; -1)$, $B(2 ; -2)$ et $C(0 ; 2)$ dans un repère orthonormé.

1°) Le triangle ABC est-il **isocèle** ? **Équilatéral** ? **Rectangle** ?

Le repère est orthonormé, donc $|| \vec{u} || = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\vec{AB} = \dots$$

$$\text{Donc } AB = || \vec{AB} || = \dots$$

$$\vec{BC} = \dots$$

$$\text{Donc } BC = || \vec{BC} || = \dots$$

$$\vec{AC} = \dots$$

$$\text{Donc } AC = || \vec{AC} || = \dots$$

A-t-on $AB = BC = AC$?

ou seulement **2 côtés égaux** ?

Et **Pythagore** donne-t-il 90° ?

Soient les points $A(-1; -1)$, $B(2; -2)$ et $C(0; 2)$ dans un repère orthonormé.

1°) Le triangle ABC est-il isocèle ? Équilatéral ? Rectangle ?

Le repère est orthonormé, donc $|| \vec{u} || = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\vec{AB} = (2 - (-1); (-2) - (-1)) = (3; -1)$$

$$\text{Donc } AB = || \vec{AB} || = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\vec{BC} = (0 - 2; 2 - (-2)) = (-2; 4)$$

$$\text{Donc } BC = || \vec{BC} || = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

$$\vec{AC} = (0 - (-1); 2 - (-1)) = (1; 3)$$

$$\text{Donc } AC = || \vec{AC} || = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

Soient les points $A(-1; -1)$, $B(2; -2)$ et $C(0; 2)$ dans un repère orthonormé.

1°) Le triangle ABC est-il isocèle ? Équilatéral ? Rectangle ?

Le repère est orthonormé, donc $|| \vec{u} || = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\vec{AB} = (2 - (-1); (-2) - (-1)) = (3; -1)$$

$$\text{Donc } AB = || \vec{AB} || = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\vec{BC} = (0 - 2; 2 - (-2)) = (-2; 4)$$

$$\text{Donc } BC = || \vec{BC} || = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

$$\vec{AC} = (0 - (-1); 2 - (-1)) = (1; 3)$$

$$\text{Donc } AC = || \vec{AC} || = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$AB = AC \iff$ triangle **isocèle**

$\neq BC$ **non équilatéral**

Soient les points $A(-1; -1)$, $B(2; -2)$ et $C(0; 2)$ dans un repère orthonormé.

1°) Le triangle ABC est-il isocèle ? Équilatéral ? Rectangle ?

Le repère est orthonormé, donc $|| \vec{u} || = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\vec{AB} = (2 - (-1); (-2) - (-1)) = (3; -1)$$

$$\text{Donc } AB = || \vec{AB} || = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\vec{BC} = (0 - 2; 2 - (-2)) = (-2; 4)$$

$$\text{Donc } BC = || \vec{BC} || = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

$$\vec{AC} = (0 - (-1); 2 - (-1)) = (1; 3)$$

$$\text{Donc } AC = || \vec{AC} || = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$AB = AC \iff$ triangle **isocèle**

$\neq BC$ **non équilatéral**

$$BC^2 = (\sqrt{20})^2 = 20$$

$$AB^2 + AC^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 = 10 + 10 = 20$$

$AB^2 + AC^2 = BC^2 \iff$ triangle **rectangle** d'après Pythagore

$A(-1; -1)$, $B(2; -2)$ et $C(0; 2)$

2°) Soit M le milieu de [BC].

Le triangle ABM est-il rectangle ?

$A(-1; -1)$, $B(2; -2)$ et $C(0; 2)$

2°) Soit M le milieu de $[BC]$.

Le triangle ABM est-il rectangle ?

M milieu de $[BC]$

donc $x_M = \frac{1}{2}(x_B + x_C)$ et $y_M = \frac{1}{2}(y_B + y_C)$

donc $M(\dots; \dots)$

On détermine les vecteurs

puis leurs longueurs (avec $\sqrt{x^2 + y^2}$)

et on utilise Pythagore

A(- 1 ; - 1), B(2 ; - 2) et C(0 ; 2)

2°) Soit M le milieu de [BC].

Le triangle ABM est-il rectangle ?

M milieu de [BC]

donc $x_M = \frac{1}{2} (x_B + x_C)$ et $y_M = \frac{1}{2} (y_B + y_C)$

$M(\frac{1}{2}(2 + 0) ; \frac{1}{2}((-2) + 2)) = (1 ; 0)$

$$M\left(\frac{1}{2}(2+0); \frac{1}{2}((-2)+2)\right) = (1; 0)$$

Le repère est orthonormé, donc $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\vec{AB} = (2 - (-1); (-2) - (-1)) = (3; -1)$$

$$\text{Donc } AB = ||\vec{AB}|| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\vec{BM} = (1 - 2; 0 - (-2)) = (-1; 2)$$

$$\text{Donc } BC = ||\vec{BM}|| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{AM} = (1 - (-1); 0 - (-1)) = (2; 1)$$

$$\text{Donc } AC = ||\vec{AM}|| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$M\left(\frac{1}{2}(2+0); \frac{1}{2}((-2)+2)\right) = (1; 0)$$

Le repère est orthonormé, donc $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\vec{AB} = (2 - (-1); (-2) - (-1)) = (3; -1)$$

$$\text{Donc } AB = ||\vec{AB}|| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\vec{BM} = (1 - 2; 0 - (-2)) = (-1; 2)$$

$$\text{Donc } BM = ||\vec{BM}|| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} \quad BM^2 + AM^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 = 5+5 = 10$$

$$\vec{AM} = (1 - (-1); 0 - (-1)) = (2; 1)$$

$$\text{Donc } AM = ||\vec{AM}|| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad AB^2 = (\sqrt{10})^2 = 10$$

$$BM^2 + AM^2 = AB^2$$

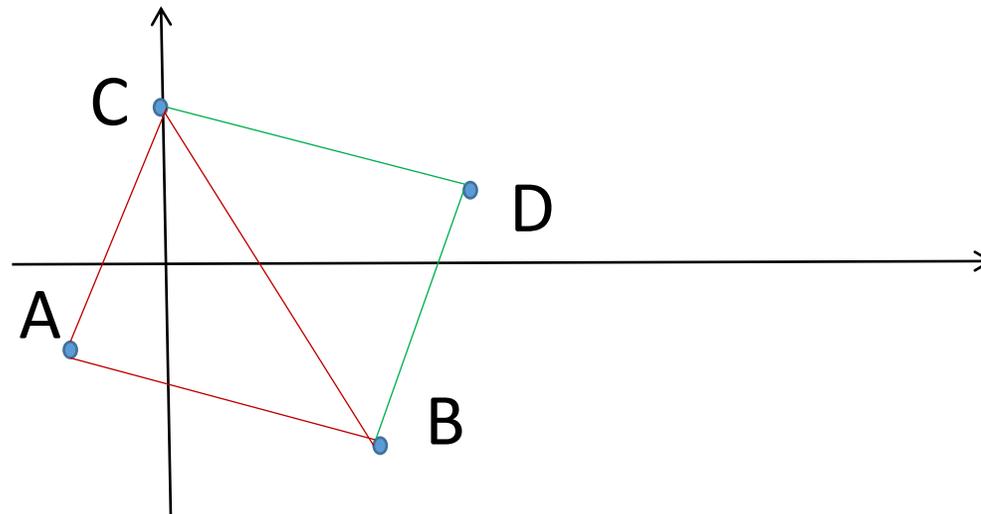
\Leftrightarrow ABM rectangle en M d'après Pythagore.

**3°) Est-il possible qu'un quadrilatère ABDC
soit un losange ?**

3°) Est-il possible qu'un quadrilatère ABDC soit un losange ?

Pour qu'il soit un losange, il faut qu'il ait 4 côtés de même longueur. On sait que ABC est un triangle isocèle, donc on a 2 côtés de même longueur, donc on peut ajouter un 4^{ème} point pour obtenir **4 côtés de même longueur**.

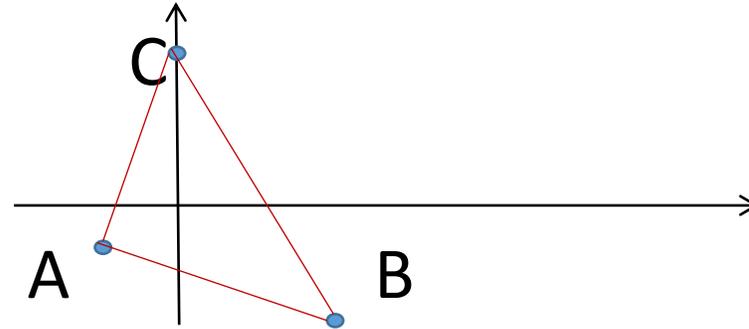
Réponse : oui.



3°)

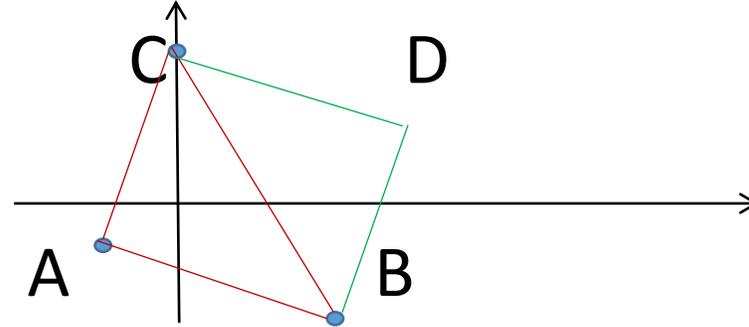
Si oui, déterminez le point D.

Le déterminer de telle façon que ...



3°)

Si oui, déterminez le point D.



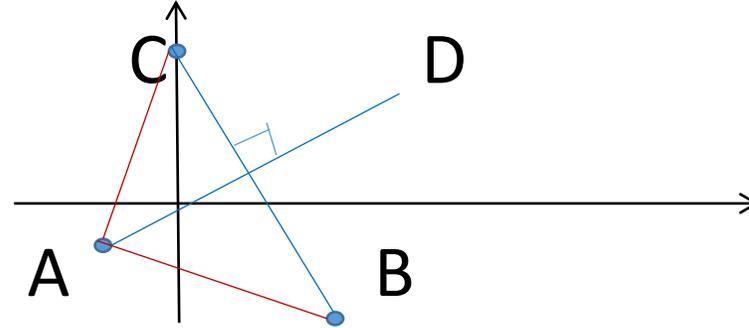
Le déterminer de telle façon que ...

1) $BD = CD = AC = AB$ en exprimant ces deux distances en fonction des coordonnées $(x ; y)$ de D serait très compliqué algébriquement.

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - (-2))^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{10}$$

3°)

Si oui, déterminez le point D.



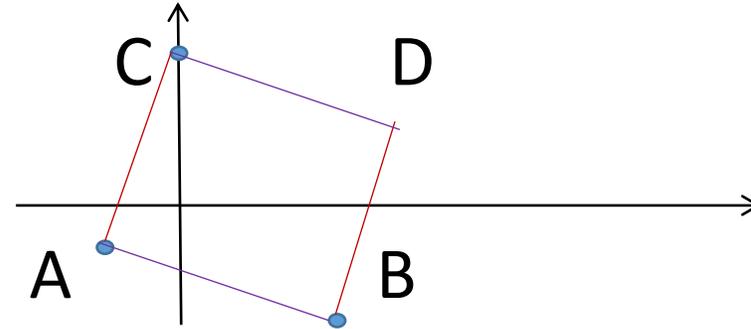
Le déterminer de telle façon que ...

2) les deux diagonales $[AD]$ et $[BC]$ se coupent à angles droit et ont même longueur $BD = CD$ en exprimant ces deux distances en fonction des coordonnées $(x ; y)$ de D serait très compliqué algébriquement.

Il faudra attendre la classe de 1^{ère} pour avoir un outil permettant de traduire algébriquement une orthogonalité.

3°) A(- 1 ; - 1), B(2 ; - 2) et C(0 ; 2)

Si oui, déterminez le point D.



Le déterminer de telle façon que ...

3) **un losange est un parallélogramme** sera beaucoup plus simple :

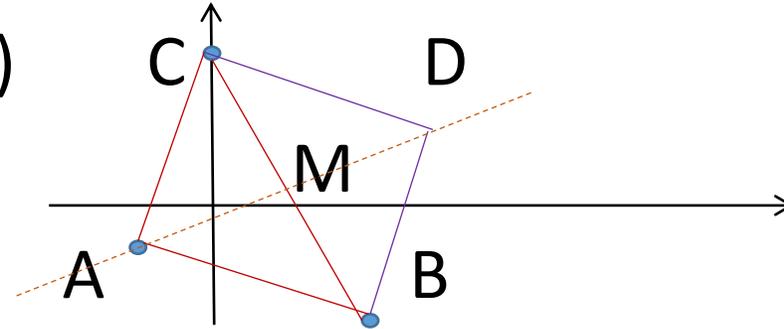
$$\vec{AC} = \vec{BD}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 - (-1) \\ 2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - (-2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \\ y + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Réponse **D(3 ; 1)**

3°) $A(-1; -1)$, $B(2; -2)$ et $C(0; 2)$

Si oui, déterminez le point D.



Le déterminer de telle façon que ...

4) D est placé sur la **médiatrice** de $[BC]$, et (BC) est la médiatrice de $[AD]$ de milieu $M(1; 0)$

Donc $\overrightarrow{AD} = 2 \overrightarrow{AM}$

$$\begin{pmatrix} x - (-1) \\ y - (-1) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ 0 - (-1) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + 1 \\ y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 4 \\ y + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Réponse **D(3; 1)**

Que peut-on dire du quadrilatère ABDC ?

Que peut-on dire du quadrilatère ABDC ?

C'est un **carré**, car ...

Que peut-on dire du quadrilatère ABDC ?

C'est un **carré**, car

- 1) le **triangle ABC** est **rectangle** en A (donc il y a un angle droit en A),
- 2) ABDC est un **parallélogramme** (donc 4 angles égaux 2 à 2, donc tous les 4 égaux à 90°)
- 3) c'est un **losange** (4 côtés égaux).

