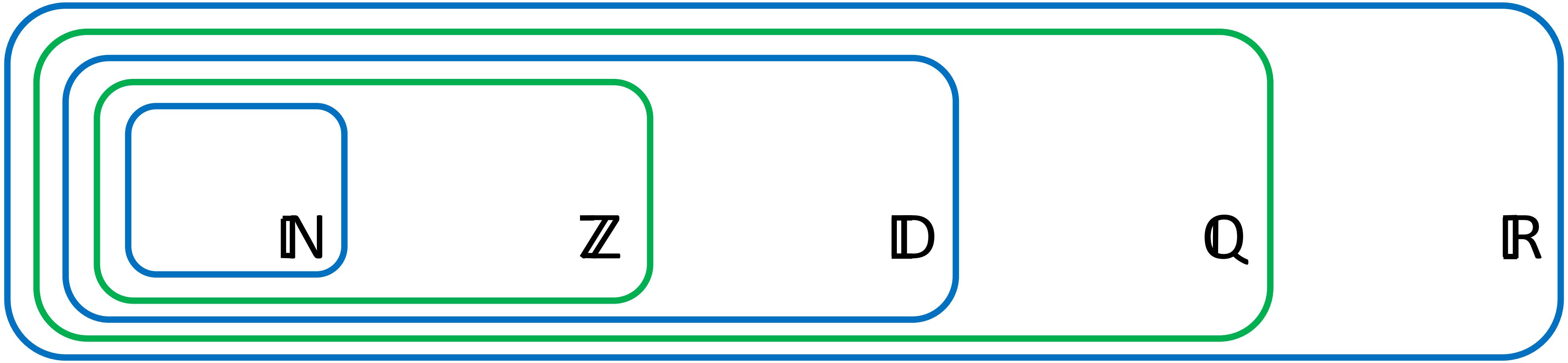
Exercice 1 :

Déterminez les plus petits ensembles auxquels appartiennent les nombres suivants :

$$A = \frac{1}{20} \qquad B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

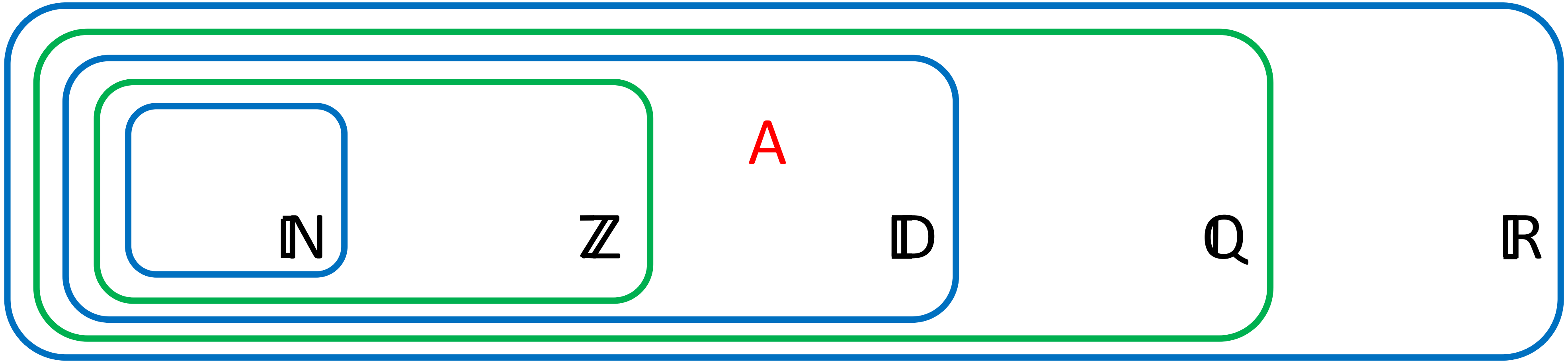
$$C = (\sqrt{2} - \sqrt{8})\sqrt{18} \qquad D = \frac{92}{7} \qquad E = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2}$$

Exercice 1 :



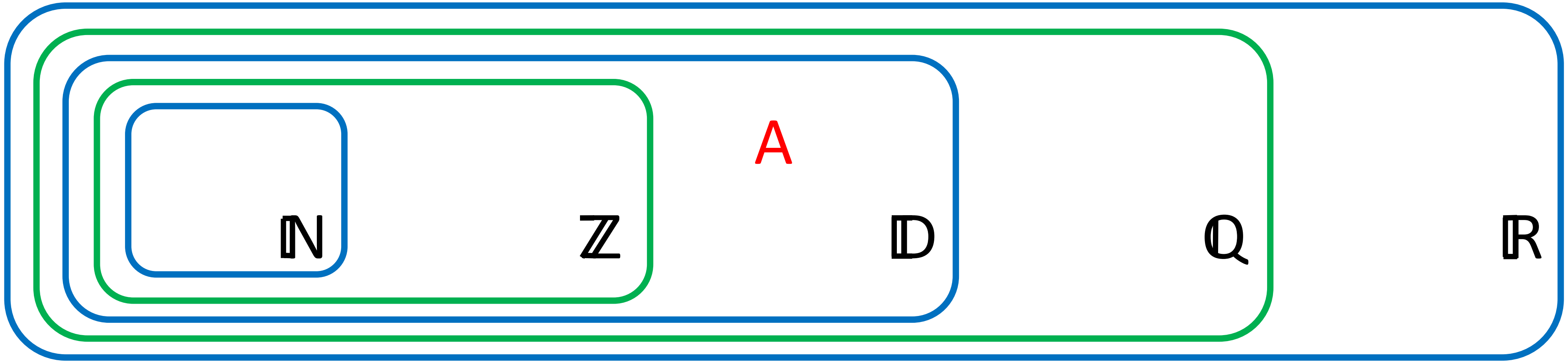
$$A = \frac{1}{20} = \frac{1 \times 5}{20 \times 5} = \frac{5}{100} = 0{,}05 \quad \text{est ...}$$

Exercice 1 :



$A = \dfrac{1}{20} = \dfrac{1\times5}{20\times5} = \dfrac{5}{100} = 0{,}05$ est un décimal non entier.

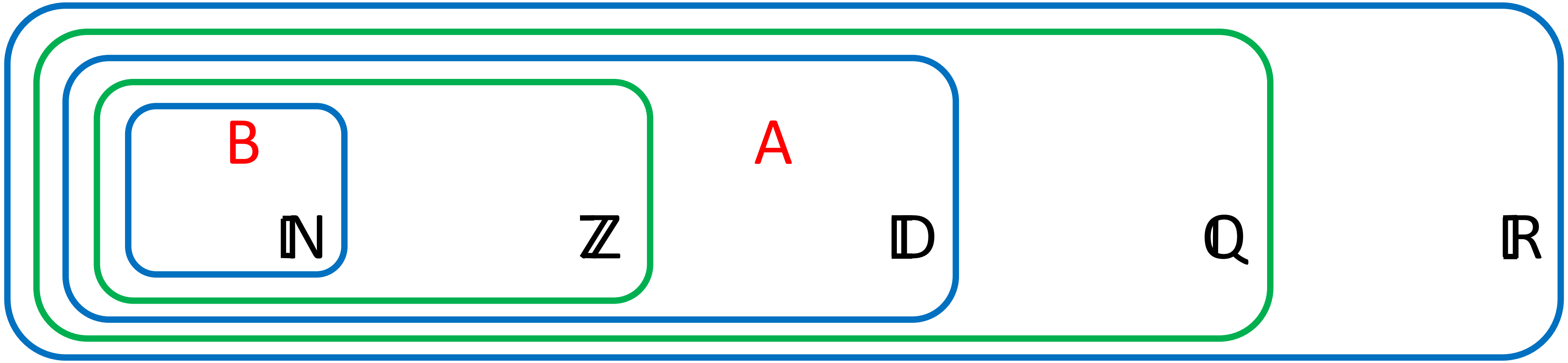
Exercice 1 :



$$A = \frac{1}{20} = \frac{1\times5}{20\times5} = \frac{5}{100} = 0{,}05$$ est un décimal non entier.

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$ est ...

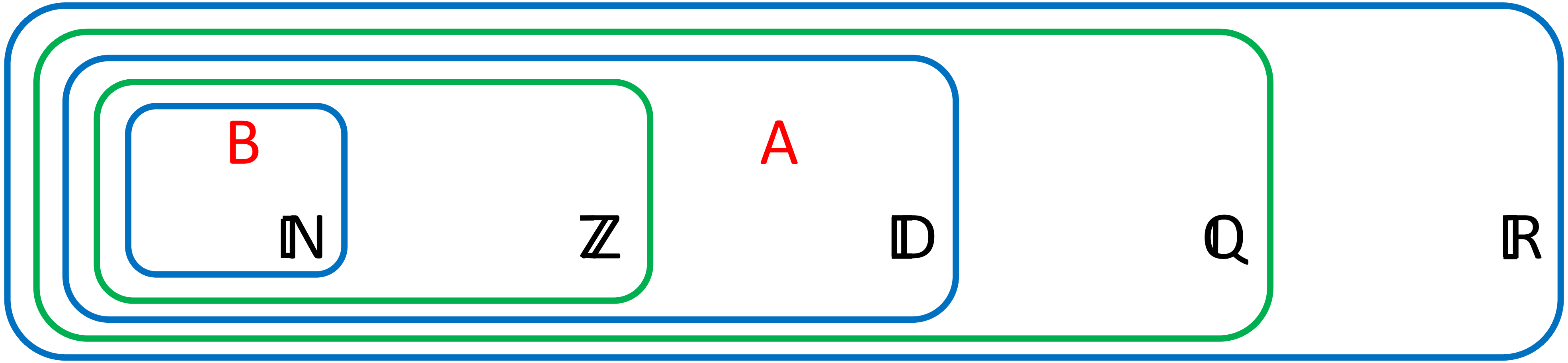
Exercice 1 :



$$A = \frac{1}{20} = \frac{1 \times 5}{20 \times 5} = \frac{5}{100} = 0{,}05$$ est un décimal non entier.

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$ est un entier naturel.

Exercice 1 :

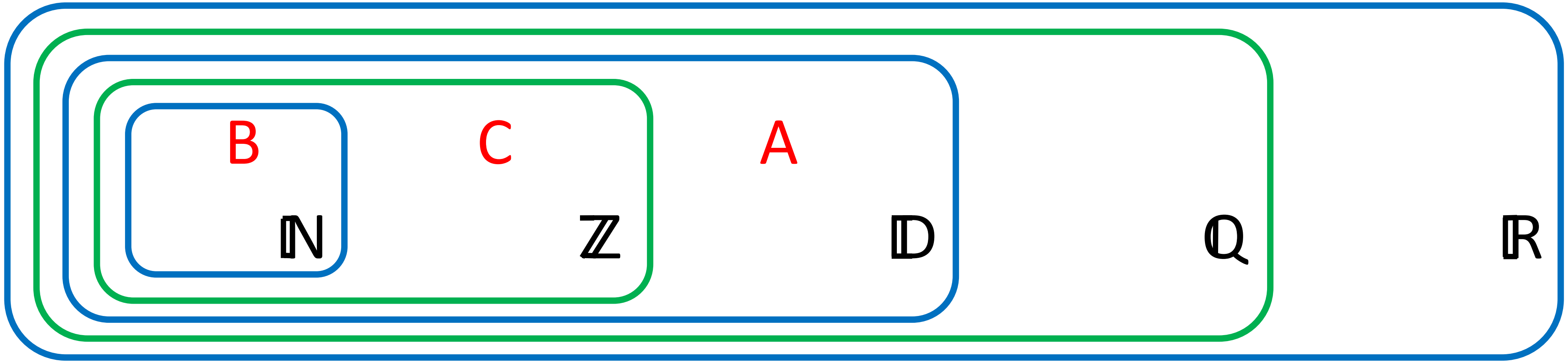


$$C = (\sqrt{2} - \sqrt{8})\ \sqrt{18} = (\sqrt{2} - \sqrt{4\times2})\ \sqrt{9\times2}$$

$$= (\sqrt{2} - 2\sqrt{2})\ 3\sqrt{2} = (-\sqrt{2})\ 3\sqrt{2} = -3\,(\sqrt{2})^2 = -3\times2 = -6$$

est ...

Exercice 1 :

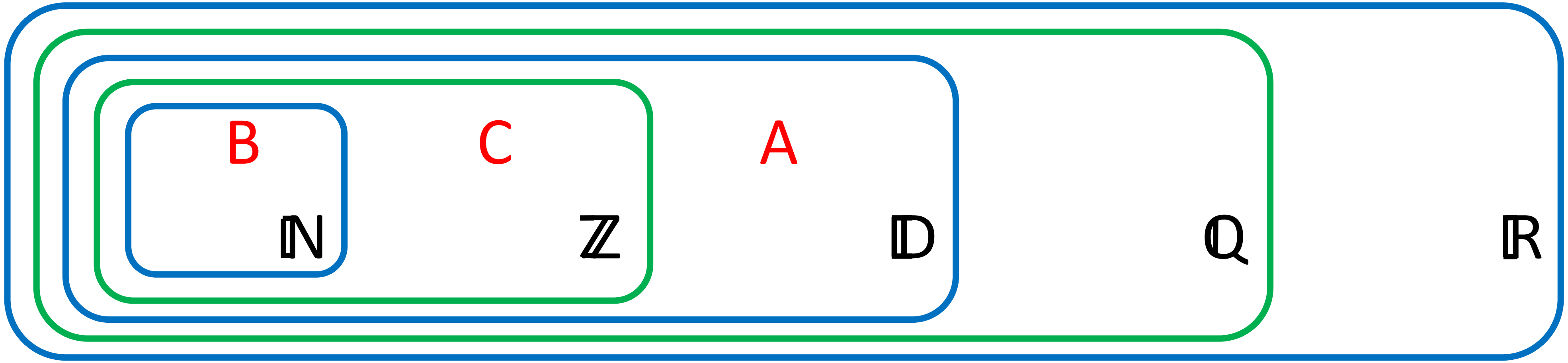


$$C = (\sqrt{2} - \sqrt{8})\ \sqrt{18} = (\sqrt{2} - \sqrt{4\times 2})\ \sqrt{9\times 2}$$

$$= (\sqrt{2} - 2\sqrt{2})\ 3\sqrt{2} = (-\sqrt{2})\ 3\sqrt{2} = -3\,(\sqrt{2})^2 = -3\times 2 = -6$$

est un entier relatif non naturel.

Exercice 1 :



$$C = (\sqrt{2} - \sqrt{8})\ \sqrt{18} = (\sqrt{2} - \sqrt{4\times 2})\ \sqrt{9\times 2}$$

$$= (\sqrt{2} - 2\sqrt{2})\ 3\sqrt{2} = (-\sqrt{2})\ 3\sqrt{2} = -3\,(\sqrt{2})^2 = -3\times 2 = -6$$

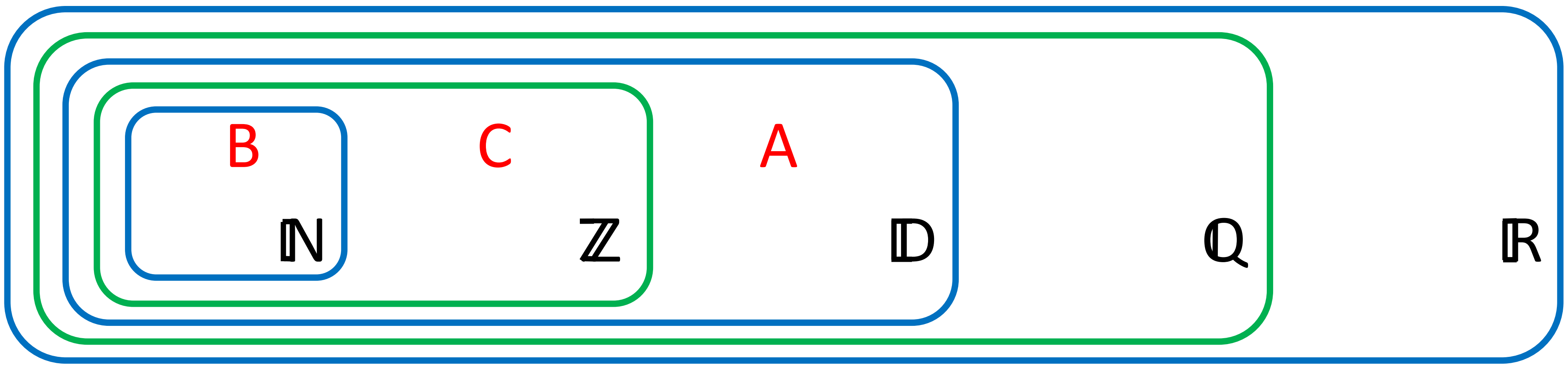
-6 est un entier relatif non naturel.

Autre méthode : distributivité

$$C = (\sqrt{2} - \sqrt{8})\ \sqrt{18} = \sqrt{2} \times \sqrt{18} - \sqrt{8} \times \sqrt{18}$$

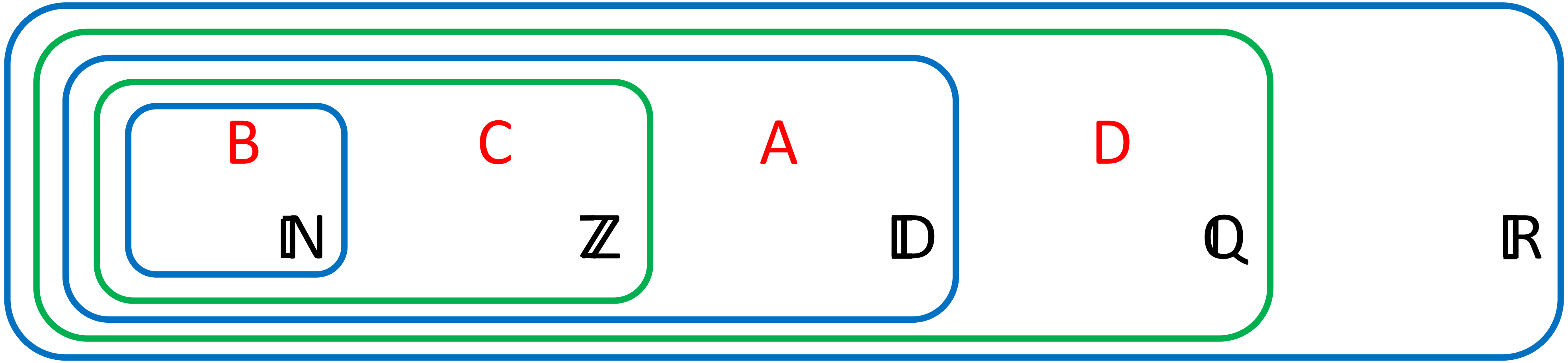
$$= \sqrt{2 \times 18} - \sqrt{8 \times 18} = \sqrt{36} - \sqrt{144} = 6 - 12 = -6$$

Exercice 1 :



$$D = \frac{92}{7} = \frac{70}{7} + \frac{21}{7} + \frac{1}{7} = 10 + 3 + \frac{1}{7} \quad \text{est ...}$$

Exercice 1 :

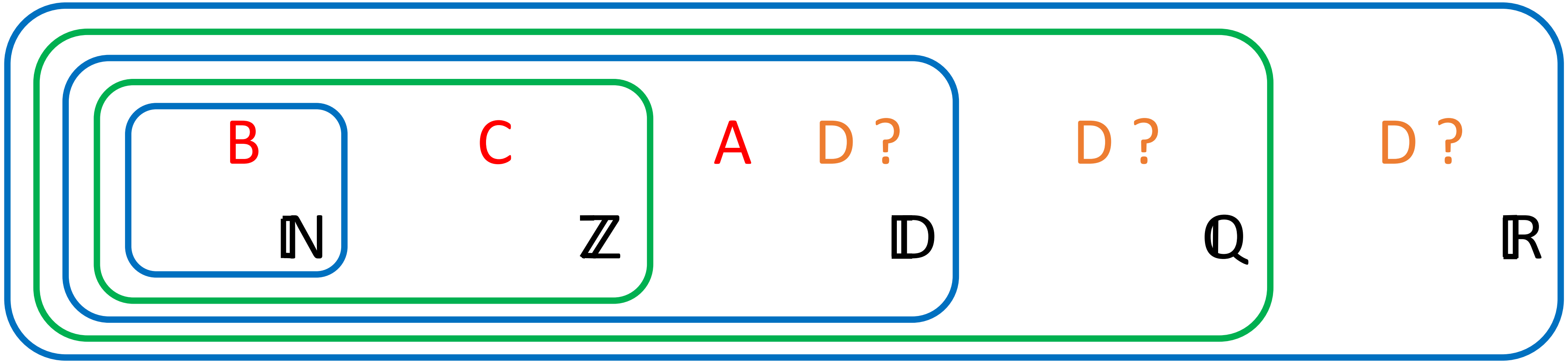


$D = \frac{92}{7} = \frac{70}{7} + \frac{21}{7} + \frac{1}{7} = 10 + 3 + \frac{1}{7}$ est un rationnel

(fractions de deux entiers)

non décimal (car 1/7 n'est pas un décimal)

Exercice 1 :

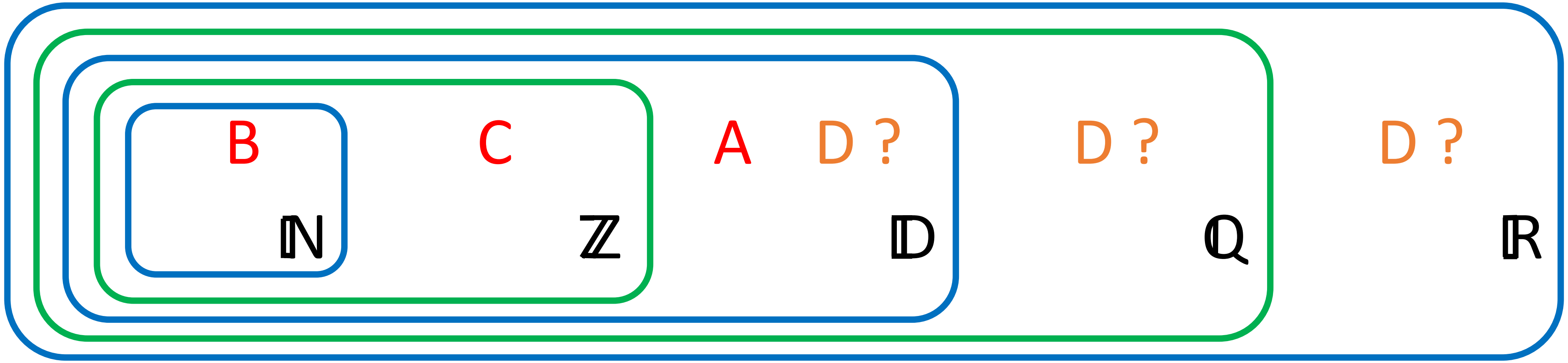


$$D = \frac{92}{7}$$

Autre **méthode** (mais imparfaite) :

à l'écran de la calculatrice 13,14285714 donc D n'est pas un entier.

Exercice 1 :



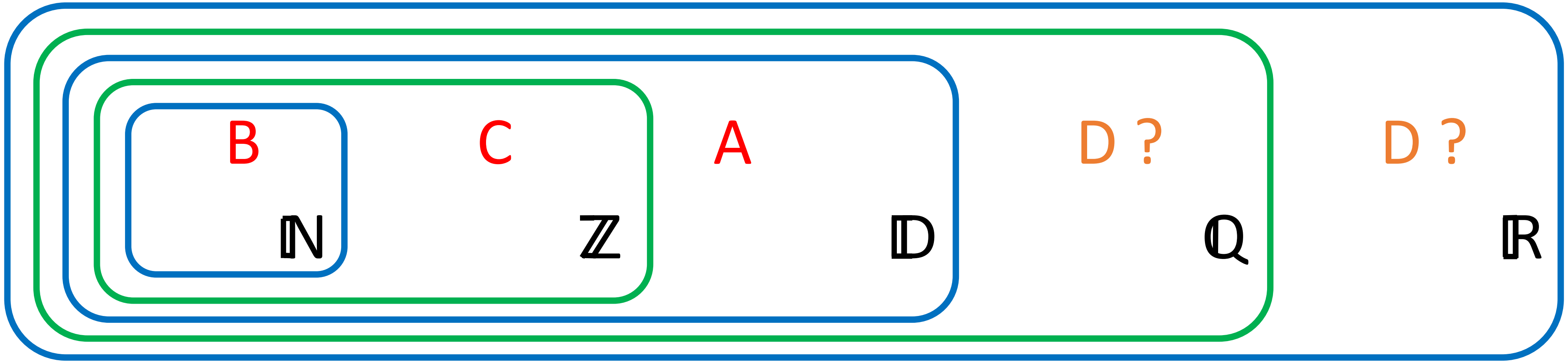
$$D = \frac{92}{7}$$

Autre **méthode** (mais imparfaite) :

à l’écran de la calculatrice 13,14285714…?, donc D n’est pas un entier.

A-t-il un nombre fini de chiffres pour être décimal ? impossible à déterminer à l’écran !

Exercice 1 :



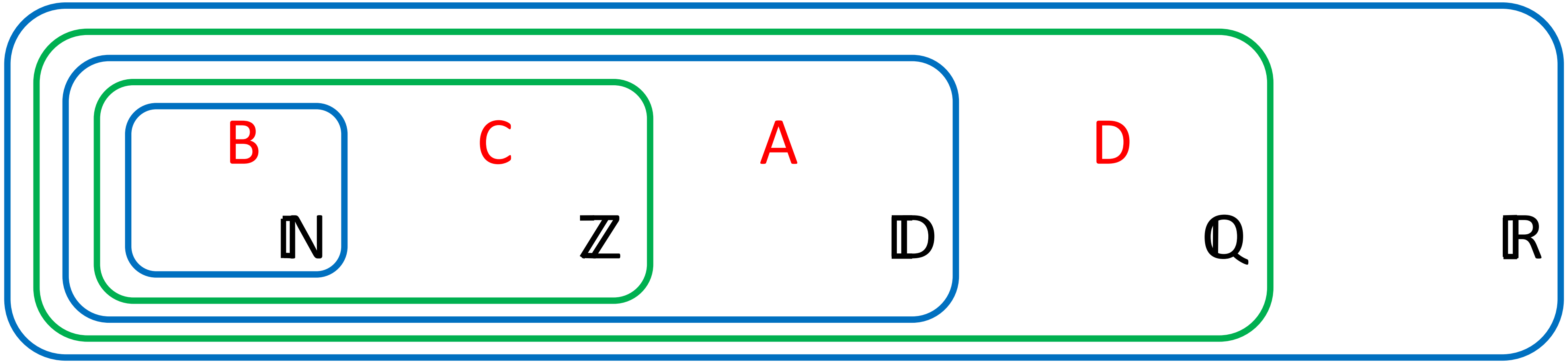
$$D = \frac{92}{7}$$

Autre **méthode** (mais imparfaite) :

à l'écran de la calculatrice 13,**142857**14…**?**, donc D n'est pas un entier.

A-t-il un nombre fini de chiffres pour être décimal ? impossible à déterminer à l'écran ! A-t-il une séquence de chiffres se répétant pour être rationnel ? idem!

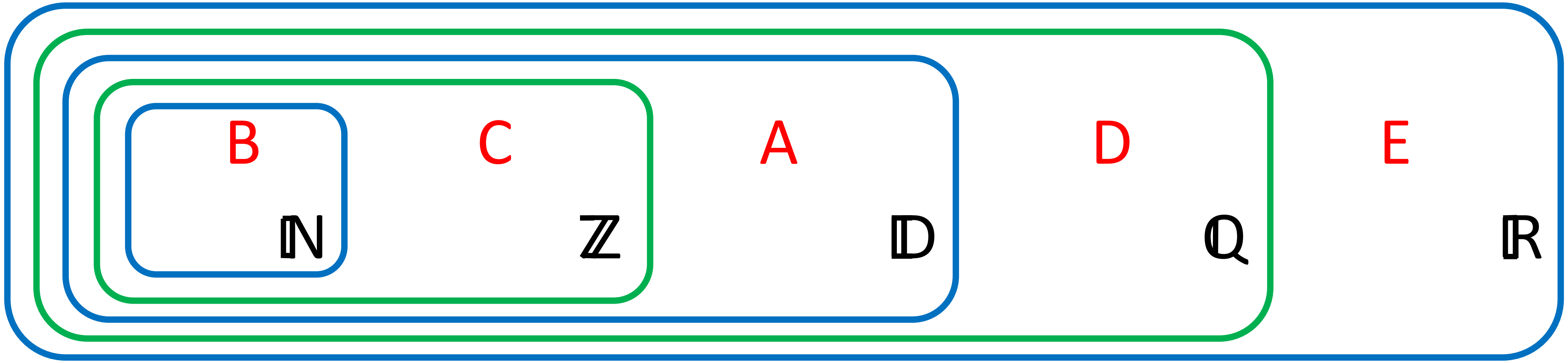
Exercice 1 :



$$E = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{(-2)^2 \times (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

est ...

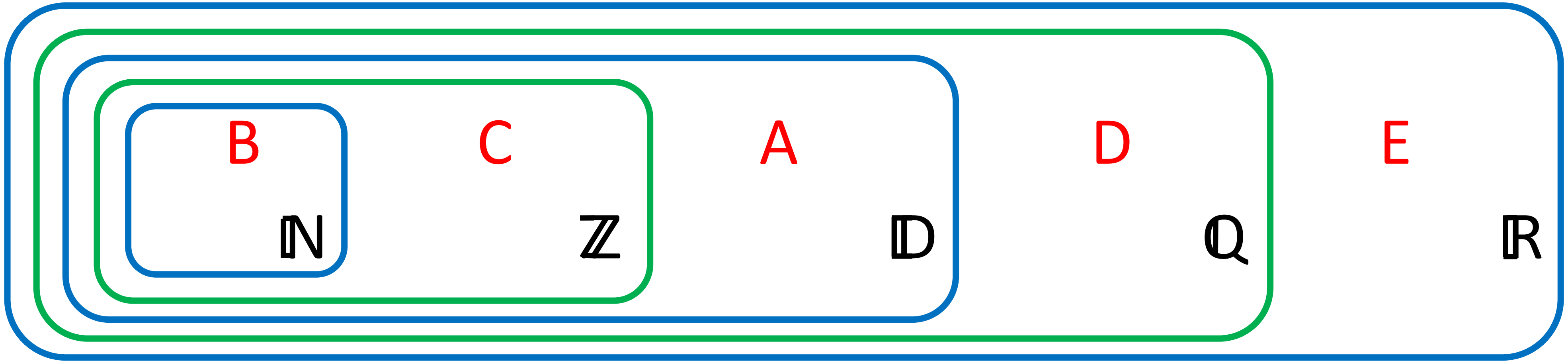
Exercice 1 :



$$E = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{(-2)^2 \times (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

est un irrationnel.

Exercice 1 :



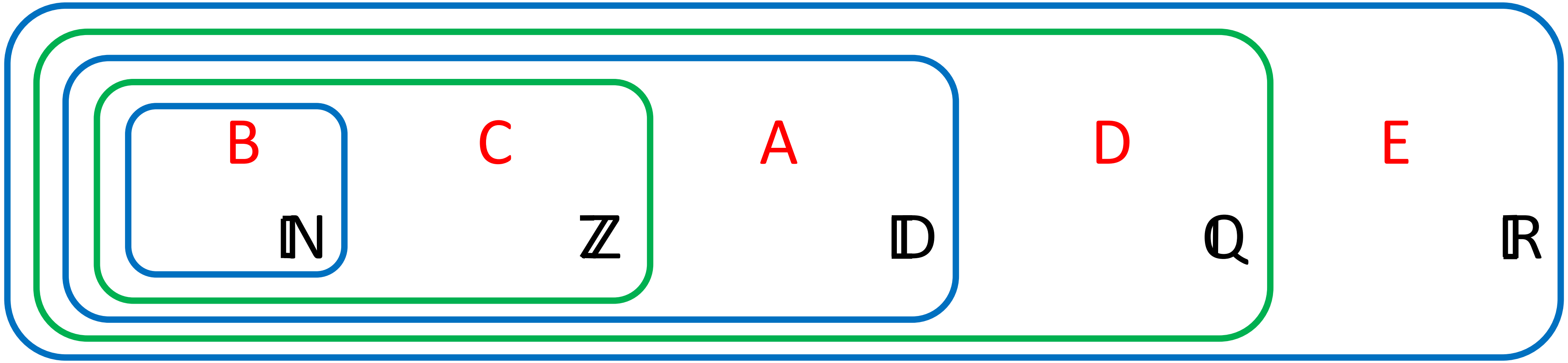
$$E = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{(-2)^2 \times (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

est un irrationnel.

Remarque : a-t-on $\sqrt{(-2\sqrt{3})^2} = -2\sqrt{3}$?

$$\sqrt{A^2} = A \text{ ?}$$

Exercice 1 :



$$E = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{(-2)^2 \times (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

est un irrationnel.

Remarque : a-t-on $\sqrt{(-2\sqrt{3})^2} = -2\sqrt{3}$?

$\sqrt{A^2} = +A$ si $A \geq 0$; $\sqrt{A^2} = -A$ si $A \leq 0$ $\quad \sqrt{(-2\sqrt{3})^2} = +2\sqrt{3}$!

Exercice 2 :

1°) Le produit de deux irrationnels peut-il être un rationnel ?

2°) Le quotient de deux décimaux peut-il ne pas être un décimal ?

3°) Le produit de deux décimaux peut-il être un entier non naturel ?

4°) La somme de deux décimaux non entiers peut-elle être un décimal entier ?

5°) La somme de deux rationnels non décimaux peut-elle être un rationnel décimal ?

6°) La somme de deux rationnels non décimaux peut-il être un rationnel décimal non entier ? un entier ? un entier non naturel ?

1°) Le produit de deux irrationnels peut-il être un rationnel ?

D’après la question,

Le produit de deux irrationnels … un rationnel,

et

Le produit de deux irrationnels … un rationnel.

1°) Le produit de deux irrationnels peut-il être un rationnel ?

D'après la question, le produit de deux irrationnels peut être un rationnel, comme il peut **ne pas** être un rationnel.

Il suffit donc, pour répondre à la question,

de trouver **…** pour prouver la réponse Oui,

et de faire **…** la réponse Non.

1°) Le produit de deux irrationnels peut-il être un rationnel ?

D'après la question, le produit de deux irrationnels peut être un rationnel, comme il peut **ne pas** être un rationnel.

Il suffit donc, pour répondre à la question,

de trouver **un exemple** qui marche pour prouver la réponse Oui,

et de faire une **démonstration littérale** pour prouver pour **tous** les exemples la réponse Non.

Exercice 2 :

1°) Le produit de deux irrationnels peut-il être un rationnel ?

Oui ! $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

qui est un entier, donc un rationnel.

Exercice 2 :

1°) Le produit de deux irrationnels peut-il être un rationnel ?

Oui ! $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

qui est un entier, donc un rationnel.

2°) Le quotient de deux décimaux peut-il ne pas être un décimal ?

Oui ! 1 et 3 sont des décimaux, mais $\dfrac{1}{3}$ ne l'est pas.

3°) Le produit de deux décimaux peut-il être un entier non naturel ?

Oui !   2 et -3 sont des entiers donc des décimaux $2 \times (-3) = -6$

- 6 est un entier relatif non naturel.

3°) Le produit de deux décimaux peut-il être un entier non naturel ?

Oui ! 2 et -3 sont des entiers donc des décimaux $2 \times (-3) = -6$

- 6 est un entier relatif non naturel.

4°) La somme de deux décimaux non entiers peut-elle être un décimal entier ?

Oui ! $2,4 + 1,6 = 4$ 2,4 et 1,6 sont des décimaux non entiers, et 4 est un entier donc un décimal.

5°) La somme de deux rationnels non décimaux peut-elle être un rationnel décimal ?

Oui ! $\dfrac{2}{7} + \dfrac{-2}{7} = 0$ qui est un entier donc un décimal, donc un rationnel.

Autre exemple :

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

6°) La somme de deux rationnels non décimaux peut-il être un rationnel décimal non entier ?

5°) La somme de deux rationnels non décimaux peut-elle être un rationnel décimal ?

Oui ! $\dfrac{2}{7} + \dfrac{-2}{7} = 0$ qui est un entier rationnel décimal.

6°) La somme de deux rationnels non décimaux peut-il être un rationnel décimal non entier ?

Oui ! $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{6} = 0{,}5$

6°) La somme de deux rationnels non décimaux peut-il être un rationnel décimal non entier ?

Oui ! $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{6} = 0{,}5$

un entier ?

Oui ! $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$

6°) La somme de deux rationnels non décimaux peut-il être un rationnel décimal non entier ?

Oui ! $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{6} = 0{,}5$

un entier ?

Oui ! $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} = 1$

un entier non naturel ?

Oui ! $\dfrac{-1}{3} + \dfrac{-2}{3} = -1$

Exercice 3 :

1°) Le produit de deux décimaux est-il un décimal ?

2°) La division d’un entier par un décimal est-il un rationnel ?

3°) La somme de deux décimaux est-il un décimal ?

4°) Le quotient de deux décimaux est-il un rationnel ?

5°) Le quotient de deux décimaux est-il un décimal ?

1°) Le produit de deux décimaux est-il un décimal ?

D’après la question, le produit de deux décimaux est un décimal, comme il peut **ne pas** être un rationnel.

Il suffit donc, pour répondre à la question,

de **…** pour prouver la réponse Non,

et de **…** la réponse Oui.

1°) Le produit de deux décimaux est-il un décimal ?

D’après la question, le produit de deux décimaux est un décimal, comme il peut **ne pas** être un rationnel.

Il suffit donc, pour répondre à la question,

de trouver **un exemple** qui ne marche pas pour prouver la réponse Non,

et de faire une **démonstration littérale** pour prouver pour **tous** les exemples la réponse Oui.

1°) Le produit de deux décimaux est-il un décimal ?

$A = \dfrac{a}{10^n}$ a et n entiers et $B = \dfrac{b}{10^m}$ b et m entiers

$A\,B = \dfrac{a}{} \quad \dfrac{b}{} \quad \dfrac{ab}{}$

1°) Le produit de deux décimaux est-il un décimal ?

$A = \dfrac{a}{10^n}$ a et n entiers et $B = \dfrac{b}{10^m}$ b et m entiers

$$A\,B = \frac{a}{10^n} \times \frac{b}{10^m} = \ldots \frac{ab}{}$$

1°) Le produit de deux décimaux est-il un décimal ?

$$A = \frac{a}{10^n}$$ a et n entiers et $$B = \frac{b}{10^m}$$ b et m entiers

$$A\,B = \frac{a}{10^n} \times \frac{b}{10^m} = \frac{ab}{10^{n+m}}$$

1°) Le produit de deux décimaux est-il un décimal ?

$A = \dfrac{a}{10^n}$ a et n entiers et $B = \dfrac{b}{10^m}$ b et m entiers

$$A\,B = \frac{a}{10^n} \times \frac{b}{10^m} = \frac{ab}{10^{n+m}}$$

Le produit de deux entiers est un entier, donc ab entier.

La somme de deux entiers est un entier, donc n+m entier.

Donc AB est un décimal. Réponse : Oui !

2°) La division d’un entier par un décimal est-il un rationnel ?

2°) La division d'un entier par un décimal est-il un rationnel ?

$A = a$ a entier et $B = \dfrac{b}{10^n}$ b et n entiers

$$\frac{A}{B} = \ldots$$

2°) La division d'un entier par un décimal est-il un rationnel ?

$A = a$ a entier et $B = \dfrac{b}{10^n}$ b et n entiers

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{\dfrac{b}{10^n}} = \ldots$$

2°) La division d'un entier par un décimal est-il un rationnel ?

$A = a$ a entier et $B = \dfrac{b}{10^n}$ b et n entiers

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{\dfrac{b}{10^n}} = a \times \frac{10^n}{b} = \dots$$

$\frac{A}{B}$

2°) La division d'un entier par un décimal est-il un rationnel ?

$A = a$ a entier et $B = \dfrac{b}{10^n}$ b et n entiers

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{\dfrac{b}{10^n}} = a \times \frac{10^n}{b} = \frac{a}{1} \times \frac{10^n}{b} = \frac{a\ 10^n}{b}$$

2°) La division d'un entier par un décimal est-il un rationnel ?

$A = a$ a entier et $B = \dfrac{b}{10^n}$ b et n entiers

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{\dfrac{b}{10^n}} = a \times \frac{10^n}{b} = \frac{a}{1} \times \frac{10^n}{b} = \frac{a\ 10^n}{b}$$

10^n est un entier, a aussi. Le produit de deux entiers est un entier, donc $a \times 10^n$ entier, comme b.

Donc $\dfrac{A}{B}$ est un rationnel. Réponse : Oui !

$$\frac{A}{B}$$

3°) La somme de deux décimaux est-il un décimal ?

$A = \dfrac{a}{10^n}$ a et n entiers et $B = \dfrac{b}{10^m}$ b et m entiers

$A + B = \ldots$

3°) La somme de deux décimaux est-il un décimal ?

$A = \dfrac{a}{10^n}$ a et n entiers et $B = \dfrac{b}{10^m}$ b et m entiers

$$A + B = \frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^m}$$

3°) La somme de deux décimaux est-il un décimal ?

$A = \dfrac{a}{10^n}$ a et n entiers et $B = \dfrac{b}{10^m}$ b et m entiers

$A + B = \dfrac{a}{10^n} + \dfrac{b}{10^m}$

Supposons $m \geq n$

Donc $m = n + c$ avec $c \geq 0$ et c entier

3°) La somme de deux décimaux est-il un décimal ?

$$A + B = \frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^m}$$

Supposons $m \geq n$

Donc $m = n + c$ avec $c \geq 0$ et c entier

$$A + B = \frac{a}{10^{m-c}} + \frac{b}{10^m} = \frac{a}{\dots} + \frac{b}{10^m}$$

3°) La somme de deux décimaux est-il un décimal ?

$$A + B = \frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^m}$$

Supposons $m \geq n$

Donc $m = n + c$ avec $c \geq 0$ et c entier

$$A + B = \frac{a}{10^{m-c}} + \frac{b}{10^m} = \frac{a}{10^m\, 10^{-c}} + \frac{b}{10^m}$$

$$= \frac{\dots}{10^m} + \frac{b}{10^m}$$

3°) La somme de deux décimaux est-il un décimal ?

$$A + B = \frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^m}$$

Supposons $m \geq n$

Donc $m = n + c$ avec $c \geq 0$ et c entier

$$A + B = \frac{a}{10^{m-c}} + \frac{b}{10^m} = \frac{a}{10^m\,10^{-c}} + \frac{b}{10^m}$$

$$= \frac{a \times 10^{+c}}{10^m} + \frac{b}{10^m} = \ldots$$

3°) La somme de deux décimaux est-il un décimal ?

$$A + B = \frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^m}$$

Supposons $m \geq n$

Donc $m = n + c$ avec $c \geq 0$ et c entier

$$A + B = \frac{a}{10^{m-c}} + \frac{b}{10^m} = \frac{a}{10^m \, 10^{-c}} + \frac{b}{10^m}$$

$$= \frac{a \times 10^{+c}}{10^m} + \frac{b}{10^m} = \frac{a \times 10^c + b}{10^m}$$

3°) La somme de deux décimaux est-il un décimal ?

$$A + B = \frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^m}$$

Supposons $m \geq n$

Donc $m = n + c$ avec $c \geq 0$ et c entier

$$A + B = \frac{a}{10^{m-c}} + \frac{b}{10^m} = \frac{a \times 10^c + b}{10^m}$$

a, b et c entiers, donc $a \times 10^c + b$ entier, et m entier.

Donc A+B est un décimal.

Réponse : Oui !

4°) Le quotient de deux décimaux est-il un rationnel ?

$A = \dfrac{a}{10^n}$ a et n entiers et $B = \dfrac{b}{10^m}$ b et m entiers

$\dfrac{A}{B} =$

4°) Le quotient de deux décimaux est-il un rationnel ?

$$A = \frac{a}{10^n}$$ a et n entiers et $$B = \frac{b}{10^m}$$ b et m entiers

$$\frac{A}{B} = \frac{\dfrac{a}{10^n}}{\dfrac{b}{10^m}}$$

4°) Le quotient de deux décimaux est-il un rationnel ?

$A = \dfrac{a}{10^n}$ a et n entiers et $B = \dfrac{b}{10^m}$ b et m entiers

$$\frac{A}{B} = \frac{\dfrac{a}{10^n}}{\dfrac{b}{10^m}} = \frac{a}{10^n} \times \frac{10^m}{b}$$

4°) Le quotient de deux décimaux est-il un rationnel ?

$A = \dfrac{a}{10^n}$ a et n entiers et $B = \dfrac{b}{10^m}$ b et m entiers

$$\frac{A}{B} = \frac{\dfrac{a}{10^n}}{\dfrac{b}{10^m}} = \frac{a}{10^n} \times \frac{10^m}{b} = \frac{a \times 10^m}{b \times 10^n}$$

4°) Le quotient de deux décimaux est-il un rationnel ?

$A = \dfrac{a}{10^n}$ a et n entiers et $B = \dfrac{b}{10^m}$ b et m entiers

$$\frac{A}{B} = \frac{\dfrac{a}{10^n}}{\dfrac{b}{10^m}} = \frac{a}{10^n} \times \frac{10^m}{b} = \frac{a \times 10^m}{b \times 10^n}$$

$\dfrac{A}{B}$

a et m entiers, donc $a \times 10^m$ entier. Idem $b \times 10^n$ entier.

Donc $\dfrac{A}{B}$ est un rationnel. Réponse : Oui !

5°) Le quotient de deux décimaux est-il un décimal ?

Non ! A = 1 est un décimal et B = 3 est un décimal

alors que $\dfrac{A}{B} = \dfrac{1}{3}$ n'est pas un décimal,

mais pas forcément :

$\dfrac{2{,}06}{0{,}1}$ est le décimal 20,6 !

On peut aussi faire une démonstration littérale :

$A = \dfrac{a}{10^n}$ a et n entiers et $B = \dfrac{b}{10^m}$ b et m entiers

$\dfrac{A}{B} = \ldots$

On peut aussi faire une démonstration littérale :

$A = \dfrac{a}{10^n}$ a et n entiers et $B = \dfrac{b}{10^m}$ b et m entiers

$$\frac{A}{B} = \frac{\dfrac{a}{10^n}}{\dfrac{b}{10^m}}$$

On peut aussi faire une démonstration littérale :

$$A = \frac{a}{10^n} \quad \text{a et n entiers} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{b}{10^m} \quad \text{b et m entiers}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\dfrac{a}{10^n}}{\dfrac{b}{10^m}} = \frac{a}{10^n} \times \frac{10^m}{b}$$

On peut aussi faire une démonstration littérale :

$$A = \frac{a}{10^n}$$ a et n entiers et $$B = \frac{b}{10^m}$$ b et m entiers

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{a}{10^n}}{\frac{b}{10^m}} = \frac{a}{10^n} \times \frac{10^m}{b} = \frac{\frac{a}{b} \times 10^m}{10^n}$$

On peut aussi faire une démonstration littérale :

$$A = \frac{a}{10^n} \quad \text{a et n entiers} \quad \text{et} \quad B = \frac{b}{10^m} \quad \text{b et m entiers}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\dfrac{a}{10^n}}{\dfrac{b}{10^m}} = \frac{a}{10^n} \times \frac{10^m}{b} = \frac{\dfrac{a}{b} \times 10^m}{10^n}$$

Si a n'est pas un multiple de b et b ≠ 10 $\frac{a}{b}$ n'est pas un entier, $\frac{a}{b}\,10^m$ non plus. Réponse : Non !