Exo 1 : **Quelles fonctions définies sur IR sont affines ? linéaires ?**

1°) $f(x) = \dfrac{5x - 3}{\sqrt{2}}$

2°) $g(x) = x + 3$

3°) $h(x) = 5$

4°) $i(x) = x$

5°) $j(x) = (1 + 3x)^2 - 9x^2$

6°) k(x) est définie par la relation $[k(x)]^2 - x^2 = 1$ et la condition $k(x) < 0$

7°) x est la hauteur d'un cylindre, m(x) son volume (définie sur les positifs).

8°) x est le côté d'un carré, n(x) son aire (définie sur les positifs).

9°) $p(x) = \sqrt{x^2}$

10°) x est le côté d'un cube, V(x) est le volume du cube.

11°) $f(x) = (x + 2) (6x - 3) - (2x - 6) (3x + 1)$

1°) $f(x) = \dfrac{5x - 3}{\sqrt{2}}$

$$f(x) = \frac{5x - 3}{\sqrt{2}}$$

1°) $f(x) = \dfrac{5x - 3}{\sqrt{2}}$

$$f(x) = \frac{5x - 3}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}\,x + \frac{-3}{\sqrt{2}} = m\,x + p$$

donc f est une fonction affine.

1°) $f(x) = \dfrac{5x - 3}{\sqrt{2}}$

$$f(x) = \frac{5x - 3}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}\,x + \frac{-3}{\sqrt{2}} = m\,x + p$$

donc f est une fonction affine.

$p \neq 0$ donc f n’est pas une fonction linéaire.

1°) $f(x) = \dfrac{5x - 3}{\sqrt{2}}$

$$f(x) = \frac{5x - 3}{\sqrt{2}} = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) x + \left(\frac{-3}{\sqrt{2}}\right) = m\,x + p$$

donc f est une fonction affine.

$p \neq 0$ donc f n'est pas une fonction linéaire.

2°) $g(x) = x + 3$ Même méthode

1°) $f(x) = \dfrac{5x - 3}{\sqrt{2}}$

$$f(x) = \frac{5x - 3}{\sqrt{2}} = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) x + \left(\frac{-3}{\sqrt{2}}\right) = m\,x + p$$

donc f est une fonction affine.

$p \neq 0$ donc f n'est pas une fonction linéaire.

2°) $g(x) = x + 3$ Même méthode

$g(x) = 1\,x + 3$ $\Rightarrow$ affine et non linéaire

1°) $f(x) = \dfrac{5x - 3}{\sqrt{2}}$

$$f(x) = \frac{5x - 3}{\sqrt{2}} = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) x + \left(\frac{-3}{\sqrt{2}}\right) = m\,x + p$$

donc f est une fonction affine.

$p \neq 0$ donc f n'est pas une fonction linéaire.

2°) $g(x) = x + 3$ Même méthode

$g(x) = 1\,x + 3$ ⇒ affine et non linéaire

3°) $h(x) = 5$

$$f(x) = \frac{5x - 3}{\sqrt{2}} = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)x + \left(\frac{-3}{\sqrt{2}}\right) = m\,x + p$$

donc f est une fonction affine.

$p \neq 0$ donc f n'est pas une fonction linéaire.

2°) $g(x) = x + 3$ Même méthode

$g(x) = 1\,x + 3$ → affine et non linéaire

3°) $h(x) = 5 = 0x + 5$ → affine et non linéaire

4°) $i(x) = x$

$$f(x) = \frac{5x - 3}{\sqrt{2}} = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) x + \left(\frac{-3}{\sqrt{2}}\right) = m\,x + p$$

donc f est une fonction affine.

$p \neq 0$ donc f n'est pas une fonction linéaire.

2°) $g(x) = x + 3$ Même méthode

$g(x) = 1\,x + 3$ ⇒ affine et non linéaire

3°) $h(x) = 5 = 0x + 5$ ⇒ affine et non linéaire

4°) $i(x) = x = 1x + 0$ ⇒ affine et linéaire

5°) $j(x) = (1 + 3x)^2 - 9x^2$

$j(x) = (\ldots. \qquad) - 9x^2$

$= \ldots \; x + \ldots$?

$= m\,x + p$?

identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

5°) $j(x) = (1 + 3x)^2 - 9x^2$

$$j(x) = (1^2 + 2(1)(3x) + (3x)^2) - 9x^2$$

identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

5°) $j(x) = (1 + 3x)^2 - 9x^2$

$$j(x) = (1^2 + 2(1)(3x) + (3x)^2) - 9x^2$$

$$= (1 + 6x + 9x^2) - 9x^2$$

$$= 6x + 1$$

affine non linéaire

identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

5°) $j(x) = (1 + 3x)^2 - 9x^2$

$j(x) = (1 + 6x + 9x^2) - 9x^2 = 6x + 1$ → affine non linéaire.

6°) $k(x)$ est définie par la relation $[k(x)]^2 - x^2 = 1$ et la condition $k(x) < 0$

$[k(x)]^2 = 1 + x^2$

5°) $j(x) = (1 + 3x)^2 - 9x^2$

$j(x) = (1 + 6x + 9x^2) - 9x^2 = 6x + 1$ ⇒ affine non linéaire.

6°) $k(x)$ est définie par la relation $[k(x)]^2 - x^2 = 1$ et la condition $k(x) < 0$

$[k(x)]^2 = 1 + x^2 \iff k(x) = \sqrt{1 + x^2}$

5°) $j(x) = (1 + 3x)^2 - 9x^2$

$j(x) = (1 + 6x + 9x^2) - 9x^2 = 6x + 1 \Rightarrow$ affine non linéaire.

6°) $k(x)$ est définie par la relation $[k(x)]^2 - x^2 = 1$ et la condition $k(x) < 0$

$[k(x)]^2 = 1 + x^2 \iff k(x) = \sqrt{1 + x^2}$ ou $k(x) = -\sqrt{1 + x^2}$

Remarque : il y a toujours 2 réels qui ont le même carré !

$4^2 = (-4)^2 = 16 \qquad 7^2 = (-7)^2 = 49$

donc $w^2 = 25$ donne $w = \sqrt{25}$ ou $w = -\sqrt{25}$

$w^2 = 25 \iff w = 5$ ou $w = -5$

5°) $j(x) = (1 + 3x)^2 - 9x^2$

$j(x) = (1 + 6x + 9x^2) - 9x^2 = 6x + 1$ ⟹ affine non linéaire.

6°) $k(x)$ est définie par la relation $[k(x)]^2 - x^2 = 1$ et la condition $k(x) < 0$

$[k(x)]^2 = 1 + x^2 \iff k(x) = \sqrt{1 + x^2}$ ou $k(x) = -\sqrt{1 + x^2}$

La condition $k(x) < 0$ nous interdit la solution $k(x)$ positive

donc $k(x) = -\sqrt{1 + x^2}$

5°) $j(x) = (1 + 3x)^2 - 9x^2$

$j(x) = (1 + 6x + 9x^2) - 9x^2 = 6x + 1$ ⇒ affine non linéaire.

6°) $k(x)$ est définie par la relation $[k(x)]^2 - x^2 = 1$ et la condition $k(x) < 0$

$[k(x)]^2 = 1 + x^2 \iff k(x) = \sqrt{1 + x^2}$ ou $k(x) = -\sqrt{1 + x^2}$

La condition $k(x) < 0$ nous interdit la solution $k(x)$ positive

donc $k(x) = -\sqrt{1 + x^2}$ que l'on ne peut pas simplifier en $-\sqrt{1} - \sqrt{x^2}$

et qui donnerait (?) la fct affine $-1 - x$

car la relation $\sqrt{A + B} = \sqrt{A} + \sqrt{B}$ est très jolie mais fausse !

$\sqrt{A + B} \neq \sqrt{A} + \sqrt{B}$ ex. $\sqrt{1 + 3} \neq \sqrt{1} + \sqrt{3}$

5°) $j(x) = (1 + 3x)^2 - 9x^2$

$j(x) = (1 + 6x + 9x^2) - 9x^2 = 6x + 1 \Rightarrow$ affine non linéaire.

6°) $k(x)$ est définie par la relation $[k(x)]^2 - x^2 = 1$ et la condition $k(x) < 0$

$[k(x)]^2 = 1 + x^2 \iff k(x) = \sqrt{1 + x^2}$ ou $k(x) = -\sqrt{1 + x^2}$

La condition $k(x) < 0$ nous interdit la solution $k(x)$ positive

donc $k(x) = -\sqrt{1 + x^2}$ que l'on ne peut pas simplifier en $-\sqrt{1} - \sqrt{x^2}$

Il n'existe pas m et p deux réels fixés, tels que $k(x) = mx + p$

pour tous les x de $\mathbb{R} \iff k$ n'est pas une fonction affine

$\Rightarrow k$ ne peut être une fonction linéaire.

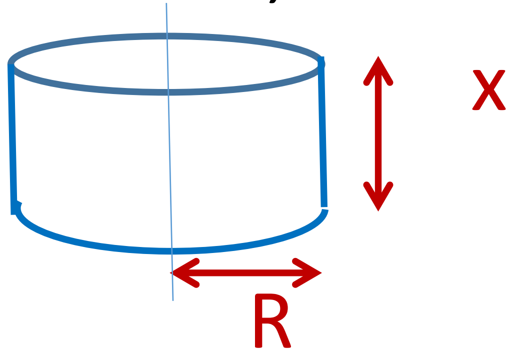
7°) x est la hauteur d'un cylindre, $m(x)$ son volume.

$m(x) = \text{Base} \times \text{hauteur} = (\pi R^2)\, x = (\pi R^2)\, x + 0 = a\, x + b$

pour tous les x de $[\, 0\, ;\, +\infty\, [$ avec a et b deux réels fixés,

donc m est une fonction affine.

$b = 0$ donc m est une fonction linéaire.

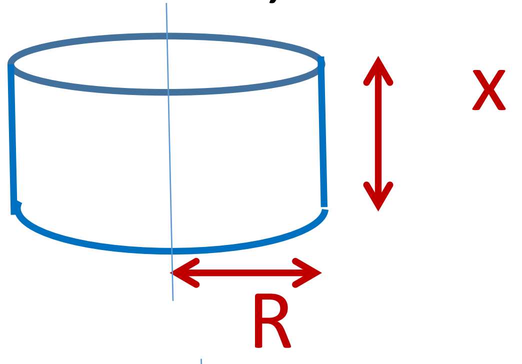


7°) x est la hauteur d'un cylindre, m(x) son volume.

m(x) = Base × hauteur = $(\pi R^2)\, x = (\pi R^2)\, x + 0 = a\, x + b$

pour tous les x de $[\, 0 \,;\, +\infty\, [$ avec a et b deux réels fixés,

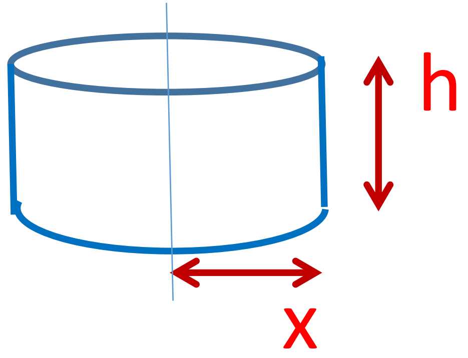
donc m est une fonction affine.



b = 0 donc m est une fonction linéaire.

Remarque : si x était le rayon,

m(x) = …



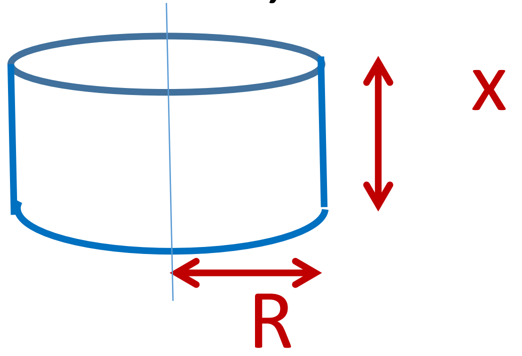
7°) x est la hauteur d'un cylindre, m(x) son volume.

$m(x) = \text{Base} \times \text{hauteur} = (\pi R^2)\, x = (\pi R^2)\, x + 0 = a\, x + b$

pour tous les x de $[\, 0\, ;\, +\infty\, [$ avec a et b deux réels fixés,

donc m est une fonction affine.

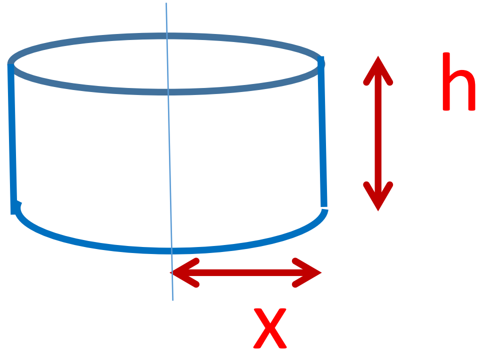
$b = 0$ donc m est une fonction linéaire.



Remarque : si x était le rayon,

$m(x) = \text{Base} \times \text{hauteur} = (\pi x^2)\, h + 0 = a\, x^2 + b$

avec $a = \pi h$ et $b = 0$



m serait une fonction non affine donc non linéaire.

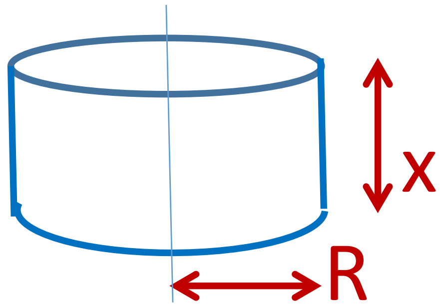
7°) x est la hauteur d'un cylindre, l(x) son volume.

$m(x)$ = Base × hauteur = $(\pi R^2)\,x = (\pi R^2)\,x + 0 = a\,x + b$

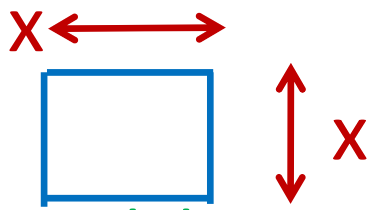
pour tous les x de $[\,0\,;+\infty\,[$ avec a et b deux réels fixés,

donc m est une fonction affine.

$b = 0$ donc m est une fonction linéaire.



8°) x est le côté d'un carré, n(x) son aire.



$n(x) = x^2$

Il n'existe pas m et p deux réels fixés, tels que $n(x) = mx + p$ pour tous les x de $[\,0\,;+\infty\,[$

$\Longleftrightarrow$ n n'est pas une fonction affine

$\Longrightarrow$ n ne peut être une fonction linéaire.

9°) $p(x) = \sqrt{x^2}$

si x est positif, $f(x) = x$ exemple $f(5) = \sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$

si x est négatif, $f(x) = -x$ exemple $f(-5) = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = -(-5)$

Il est vrai (comme au collège) que $\sqrt{\ }$ et ^{2} « s'annulent »

mais il faut que :

1) … ?

2) … ?

9°) $p(x) = \sqrt{x^2}$

si x est positif, $f(x) = x$ exemple $f(5) = \sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$

si x est négatif, $f(x) = -x$ exemple $f(-5) = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = -(-5)$

Il est vrai (comme au collège) que $\sqrt{}$ et ^{2} « s'annulent »

mais il faut que :

1) la racine existe ! ex. : $(\sqrt{-3})^2$ n'existe pas !
2) x soit un positif ! ex. : $\sqrt{4^2} = 4$ $\sqrt{x^2} = x$

car si x est un négatif $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$ $\sqrt{x^2} = -x$

9°) $p(x) = \sqrt{x^2}$

si x est positif, $f(x) = x$ exemple $f(5) = \sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$

si x est négatif, $f(x) = -x$ exemple $f(-5) = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = -(-5)$

On aurait $m = 1$ et $p = 0$ sur les positifs,

et $m = -1$ et $p = 0$ sur les négatifs.

Il n'existe pas m et p deux réels <u>fixés</u> tels que $p(x) = mx + p$ pour tous les x de $\mathbb{R}$

donc p n'est pas une fonction affine

(mais on pourrait dire qu'elle est affine <u>par morceaux</u>)

donc ne peut être une fonction linéaire.

10°)

$V(x) = x^3 \neq mx + p \Rightarrow$ non affine non linéaire

11°)

$f(x) = (x + 2) (6x - 3) - (2x - 6) (3x + 1)$

10°)

$V(x) = x^3 \neq mx + p \longrightarrow$ non affine non linéaire

11°)

$$f(x) = (\,x + 2\,)\,(\,6x - 3\,) - (\,2x - 6\,)\,(\,3x + 1\,)$$

$$= (\,\dots \qquad\qquad\qquad\qquad)-(\,\dots \qquad\qquad\qquad\qquad)$$

$$= \dots$$

10°)

$V(x) = x^3 \neq mx + p$ ⇒ non affine non linéaire

11°)

$$f(x) = (x + 2)(6x - 3) - (2x - 6)(3x + 1)$$

$$= (6x^2 + 12x - 3x - 6) - (6x^2 - 18x + 2x - 6)$$

$$= 6x^2 + 9x - 6 \quad - 6x^2 + 16x + 6$$

$$= 25x + 0$$

⇒ affine et linéaire