3) <u>Moyenne d'une série discrète</u> :

On note μ ou $\bar{x}$ ou x_{moyen} la moyenne

$$\boxed{\mu = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_t x_t}{N}}$$

3) Moyenne d'une série discrète :

On note μ ou $\bar{x}$ ou x_{moyen} la moyenne

$$\boxed{\mu = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_t x_t}{N}}$$

que l'on peut noter $\dfrac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$

$\sum$ désigne la somme pour tous les i de 1 à t

Démonstration :

C'est un nombre qui représente toutes les valeurs x_1, x_2, x_3, etc… avec leurs effectifs respectifs n_1, n_2, n_3, etc…

Ce nombre est la valeur numérique que prendraient toutes les valeurs x_1, x_2, x_3, etc… si elles étaient égales et obtenaient la même somme.

$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_p$ est noté $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i$

Soit S la somme de toutes les valeurs. $S = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_t x_t = \sum n_i x_i$

La moyenne μ est le nombre que prendraient toutes les valeurs si elles étaient égales, donc la série x_1, x_2, x_3, etc… deviendrait μ, μ, μ, etc… avec toujours les mêmes effectifs n_1, n_2, n_3, etc…

La somme $S = \sum n_i x_i = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_t x_t$

deviendrait $S' = \sum n_i x_i = n_1 \mu + n_2 \mu + \ldots + n_t \mu = (n_1 + n_2 + \ldots + n_t)\,\mu = N\mu$

Démonstration :

La moyenne μ est le nombre que prendraient toutes les valeurs si elles étaient égales, et si elles donnaient la même somme.

$S' = S$

$$\Longleftrightarrow \quad N\,\mu = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_t x_t$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mu = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_t x_t}{N}$$

La moyenne représente la série, car elle la résume en 1 seul nombre, qui serait le même nombre pour toutes les valeurs de la série, en ayant la même somme.

Exemple : déterminez la **moyenne** pour la série de l’exercice précédent.

x_i	**0**	**1**	**2**
n_i	4	25	5

Exemple : déterminez la moyenne pour la série de l'exercice précédent.

x_i	**0**	**1**	**2**
n_i	4	25	5

$$\mu = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{4\times 0 + 25\times 1 + 5\times 2}{4 + 25 + 5} = \frac{35}{34}$$

En moyenne, les 34 élèves de la classe ont 35/34 ≈ 1,03 calculatrice.

Exemple : déterminez la moyenne pour la série de l'exercice précédent.

$$\mu = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{4\times0 + 25\times1 + 5\times2}{4 + 25 + 5} = \frac{35}{34}$$

x_i	0	1	2
n_i	4	25	5

En moyenne, les 34 élèves de la classe ont 35/34 ≈ 1,03 calculatrice.

Remarque : la valeur exacte est 35/34, mais 1,03 est une valeur approchée, car 35/34 n'est pas un nombre décimal, donc son écriture décimale comporte une infinité de chiffres.

Linéarité de la moyenne :

Lorsqu'on ajoute un même nombre k à toutes les valeurs x_i d'une série statistique, alors la moyenne…

Linéarité de la moyenne :

Lorsqu'on ajoute un même nombre k à toutes les valeurs x_i d'une série statistique, alors la moyenne est augmentée de k.

$$\boxed{\text{si} \quad x_i' = x_i + k \quad \text{pour tous les } i \quad \text{alors} \quad \mu' = \mu + k}$$

Linéarité de la moyenne :

Lorsqu'on ajoute un même nombre k à toutes les valeurs x_i d'une série statistique, alors la moyenne est augmentée de k.

si $x_i' = x_i + k$ pour tous les i alors $\mu' = \mu + k$

Lorsqu'on multiplie un même nombre k à toutes les valeurs x_i d'une série statistique, alors la moyenne …

Linéarité de la moyenne :

Lorsqu'on ajoute un même nombre k à toutes les valeurs x_i d'une série statistique, alors la moyenne est augmentée de k.

si $x_i' = x_i + k$ pour tous les i alors $\mu' = \mu + k$

Démonstration :

$$\mu' = \frac{n_1 x_1' + \ldots + n_t x_t'}{N} = \frac{n_1 (x_1 + k) + \ldots + n_t (x_t + k)}{N}$$

$$= \frac{n_1 x_1 + \ldots + n_t x_t}{N} + \frac{k (n_1 + \ldots + n_t)}{N} = \mu + k$$

Linéarité de la moyenne :

Lorsqu'on multiplie toutes les valeurs x_i d'une série statistique par un même nombre k, alors la moyenne est …

Linéarités de la moyenne :

Lorsqu'on ajoute un même nombre k à toutes les valeurs x_i d'une série statistique, alors la moyenne est augmentée de k.

si $\quad x_i' = x_i + k \quad$ pour tous les $i \quad$ alors $\quad \mu' = \mu + k$

Lorsqu'on multiplie toutes les valeurs x_i d'une série statistique par un même nombre k, alors la moyenne est multipliée par k.

si $\quad x_i' = x_i \times k \quad$ pour tous les $i \quad$ alors $\quad \mu' = \mu \times k$

Linéarité de la moyenne :

Lorsqu'on multiplie toutes les valeurs x_i d'une série statistique par un même nombre k, alors la moyenne est multipliée par k.

si $x_i' = x_i \times k$ pour tous les i alors $\mu' = \mu \times k$

Démonstration :

$$\mu' = \frac{n_1 x_1' + \dots + n_t x_t'}{N} = \frac{n_1 (x_1 \times k) + \dots + n_t (x_t \times k)}{N}$$

$$= \frac{(n_1 x_1 + \dots + n_t x_t)\, k}{N} = \mu \times k$$

Moyenne d'une série

à partir des moyennes de sous-séries :

Soit une série d'effectif N, coupée en deux sous-séries de moyennes respectives μ_1 et μ_2 et d'effectifs N_1 et N_2.

$$\boxed{\mu = \frac{N_1 \, \mu_1 + N_2 \, \mu_2}{N_1 + N_2}}$$

Moyenne d'une série à partir des moyennes de sous-séries :

Soit une série d'effectif N, coupée en deux sous-séries de moyennes respectives μ_1 et μ_2 et d'effectifs N_1 et N_2.

$$\boxed{\mu = \frac{N_1\,\mu_1 + N_2\,\mu_2}{N_1 + N_2}}$$

Démonstration :

$$\mu = \frac{(n_1\,x_1 + \ldots + n_t\,x_t) + (n_{t+1}\,x_{t+1} + \ldots + n_p\,x_p)}{N} = \frac{N_1\,\mu_1 + N_2\,\mu_2}{N_1 + N_2}$$

puisque $\mu_1 = \dfrac{n_1\,x_1 + \ldots + n_t\,x_t}{N_1}$ et $\mu_2 = \dfrac{n_{t+1}\,x_{t+1} + \ldots + n_p\,x_p}{N_2}$

4) Médiane :

C'est le nombre qui sépare la série statistique en deux sous-séries de même effectif.

Si la série est d'effectif impair N, la médiane M_e est forcément une valeur de la série :

$N = m + 1 + m$ donc $M_e = x_{m+1}$

Exemple : $N = 17 = 8 + 1 + 8$ donc $M_e = x_9$

4) Médiane :

Si la série est d'effectif impair, $N = m + 1 + m$ donc $M_e = x_{m+1}$

Si la série est d'effectif pair N, la médiane M_e n'est **pas** une valeur x_i de la série : $N = m + m$ on adopte $M_e = ½(x_m + x_{m+1})$

Exemples : **1)** série constituée des nombres 5 ; 11 ; 11 ; 14.

$M_e = \ldots ?$

2) série constituée des nombres 2 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 14.

$M_e = \ldots ?$

3) série constituée des nombres 1 ; 5 ; 9 ; 13 ; 14 ; 19.

$M_e = \ldots ?$

4) Médiane :

Si la série est d'effectif impair, $N = m + 1 + m$ donc $M_e = x_{m+1}$

Si la série est d'effectif pair N, la médiane M_e n'est **pas** une valeur x_i de la série : $N = m + m$ on adopte $M_e = ½(x_m + x_{m+1})$

Exemples : **1)** série constituée des nombres 5 ; 11 ; 11 ; 14.

$N = 4 = 2 + 2$ donc $M_e = ½(x_2 + x_3) = ½(11 + 11) = ½\ 22 = \mathbf{11}$

2) série constituée des nombres 2 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 14.

$N = 7 = 3 + 1 + 3$ donc $M_e = x_4 = \mathbf{9}$

3) série constituée des nombres 1 ; 5 ; 9 ; 13 ; 14 ; 19.

$N = 6 = 3 + 3$ donc $M_e = ½(x_3 + x_4) = ½(9 + 13) = ½\ 22 = \mathbf{11}$

5) Premier quartile Q_1 :

C'est la plus petite valeur x_q de la série telle qu'au moins 25% des valeurs soient inférieures ou égales à Q_1.

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 <$ etc...

25% des valeurs donc 25% de l'effectif de la série

donc $q \geq \frac{1}{4} N$

Mais ¼ N n'est pas forcément un entier !

S'il n'est pas entier, on prendra le 1er entier q supérieur à ¼ N car on veut au moins 25% de l'effectif de la série.

5) Premier quartile Q_1 :

C'est la plus petite valeur x_q de la série telle qu'au moins 25% des valeurs soient inférieures ou égales à Q_1.

Exemple :

Série 2 4 5 7 8 9 12 15 22

Quel est son 1er quartile ?

5) Premier quartile Q_1 :

C'est la plus petite valeur x_q de la série telle qu'au moins 25% des valeurs soient inférieures ou égales à Q_1.

Exemple :

Série 2 4 5 7 8 9 12 15 22

↑ 2,25ème terme

Quel est son 1er quartile ?

Effectif N = 9 ¼ 9 = 2,25 ⟹ Q_1 = …

5) Premier quartile Q_1 :

C'est la plus petite valeur x_q de la série telle qu'au moins 25% des valeurs soient inférieures ou égales à Q_1.

Exemple :

Série 2 4 5 7 8 9 12 15 22 au moins 25% de l'effectif

2,25ème terme

Quel est son 1er quartile ?

Effectif $N = 9$ $\frac{1}{4}\,9 = 2{,}25$ $\Rightarrow$ $Q_1 = x_3 = 5$

6) **Troisième** quartile Q_3 :

C'est la plus petite valeur x_q de la série telle qu'au moins **75%** des valeurs soient inférieures ou égales à Q_3.

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 <$ etc…

75% des valeurs donc **75%** de l'effectif de la série

donc $q \geq \frac{3}{4} N$

Mais **¾** N n'est pas forcément un entier !

S'il n'est pas entier, on prendra le 1er entier q supérieur à **¾** N car on veut au moins **75%** de l'effectif de la série.

6) **Troisième** quartile Q_3 :

C'est la plus petite valeur x_q de la série telle qu'au moins **75%** des valeurs soient inférieures ou égales à Q_3.

Exemple :

Série 2 4 5 7 8 9 12 15 22 au moins 25% de l'effectif

2,25$^{\text{ème}}$ terme

Effectif N = 9 ¼ 9 = 2,25 ⟹ $Q_1 = x_3 = 5$

$Q_3 = \ldots$?

6) **Troisième quartile** Q_3 :

C'est la plus petite valeur x_q de la série telle qu'au moins **75%** des valeurs soient inférieures ou égales à Q_3.

Exemple :

Série 2 4 5 7 8 9 12 15 22 au moins 25% de l'effectif

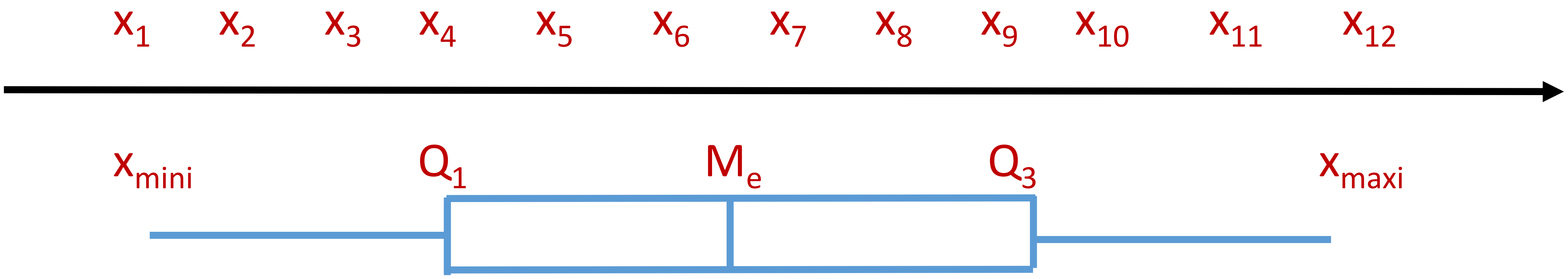
2,25ème terme

Effectif N = 9 ¼ 9 = 2,25 ⟹ $Q_1 = x_3 = 5$

Série 2 4 5 7 8 9 12 15 22 au moins 75% de l'effectif

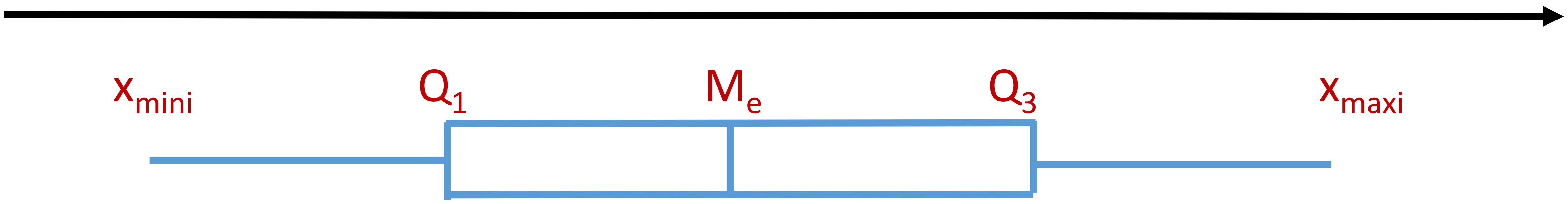
Effectif N = 9 ¾ 9 = 6,75 ⟹ $Q_3 = x_7 = 12$

La valeur minimale x_1, le 1[er] quartile Q_1, la médiane M_e, le 3[ème] quartile Q_3, et la valeur maximale x_p, permettent de résumer la série de N valeurs x_1, x_2, x_3, etc… par seulement 5 valeurs.



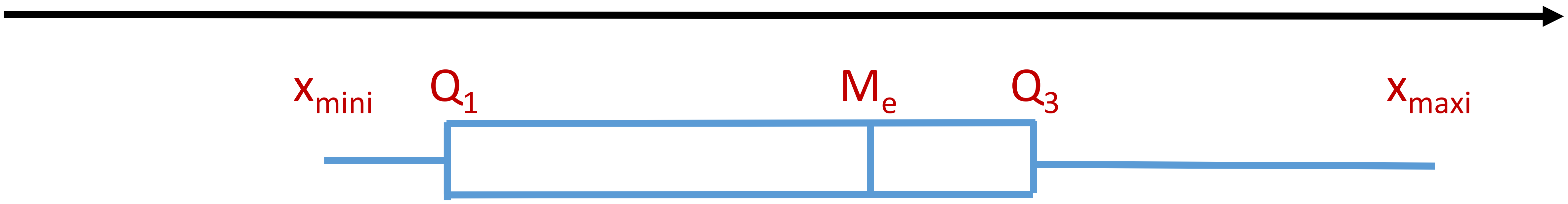
entre lesquelles il y a *à peu près* 25% des valeurs x_i de la série.

La valeur minimale x_1, le 1^er quartile Q_1, la médiane M_e, le 3^ème quartile Q_3, et la valeur maximale x_p, permettent de résumer la série de N valeurs x_1, x_2, x_3, etc… par seulement 5 valeurs.



entre lesquelles il y a *à peu près* 25% des valeurs x_i de la série.

La valeur minimale x_1, le 1er quartile Q_1, la médiane M_e, le 3ème quartile Q_3, et la valeur maximale x_p, permettent de résumer la série de N valeurs x_1, x_2, x_3, etc… par seulement 5 valeurs.



entre lesquelles il y a *à peu près* 25% des valeurs x_i de la série.

7) Ecart interquartiles :

C'est l'écart entre les quartiles Q_1 et Q_3.

Donc $\boxed{Q_3 - Q_1}$

Entre Q_1 et Q_3 on a … de la série.

7) Ecart interquartiles :

C'est l'écart entre les quartiles Q_1 et Q_3.

Donc $\boxed{Q_3 - Q_1}$

Entre Q_1 et Q_3 on a ≈ 75 – 25 = 50% de la série.

Donc $Q_3 - Q_1$ permet de connaître …

7) Ecart interquartiles :

C'est l'écart entre les quartiles Q_1 et Q_3.

Donc $\boxed{Q_3 - Q_1}$

Entre Q_1 et Q_3 on a ≈ 75 – 25 = 50% de la série.

Donc $Q_3 - Q_1$ permet de connaître si les 50% de l'effectif central est réparti avec des valeurs numériques proches ou éloignées.

7) Ecart interquartiles :

C'est l'écart entre les quartiles Q_1 et Q_3.

Donc $\boxed{Q_3 - Q_1}$

Le 1er quartile représente à peu près 25% de l'effectif, et le 3ème quartile représente à peu près 75% de l'effectif, donc entre les deux il y a à peu près la moitié de l'effectif.

L'écart interquartiles permet donc de savoir si la moitié de l'effectif autour de la valeur médiane est répartie sur une grande plage ou pas

(si les 50% centraux de l'effectif sont étendus ou non).

8) Etendue :

C'est l'écart entre toutes les valeurs

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < \ldots < x_{p-1} < x_p$

Donc $\boxed{x_{maxi} - x_{mini}}$

L'étendue permet de savoir si l'effectif est réparti sur une grande plage ou une petite plage.

L'étendue permet de savoir si la série est étendue ou resserrée.

9) Mode d'une série discrète :

C'est la valeur ayant le plus grand effectif.

(pour les séries discrètes)

Si la série est continue (série constituée d'intervalles) :

La **classe modale** est l'intervalle ayant le plus grand effectif.

III Représentations graphiques

1) <u>Diagrammes à bâtons ou à barres</u> : uniquement pour les séries discrètes.

On obtient la même forme de graphique, que l'on étudie les effectifs ou les fréquences des valeurs de la série.

III Représentations graphiques

1) Diagrammes à bâtons ou à barres : uniquement pour les séries discrètes.

On obtient la même forme de graphique, que l'on étudie les effectifs ou les fréquences des valeurs de la série.

Exemple à partir du même exercice sur le nb de calculatrices :

x_i	0	1	2
n_i	4	25	5

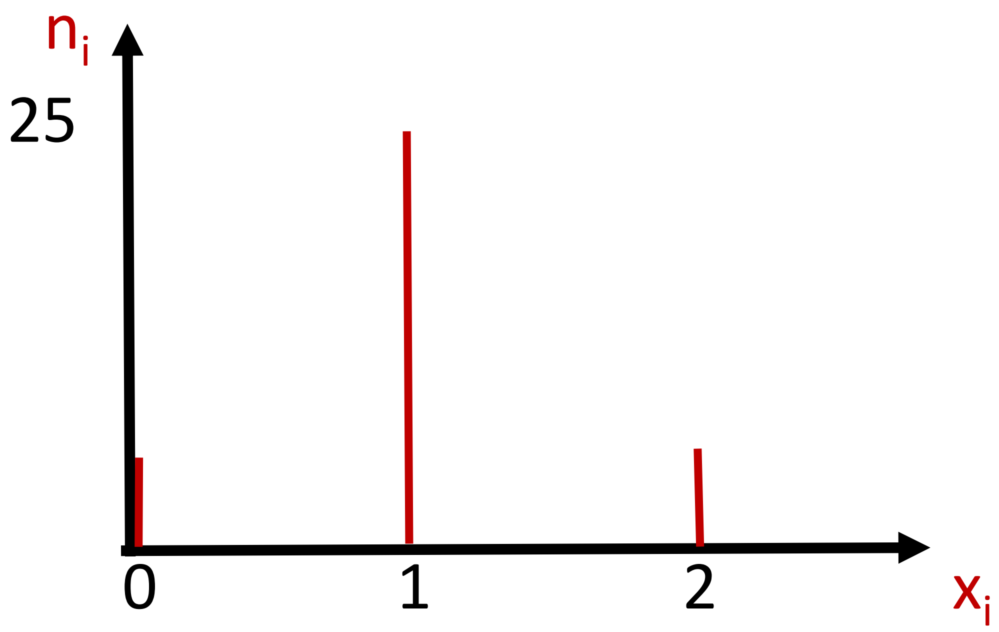
III Représentations graphiques

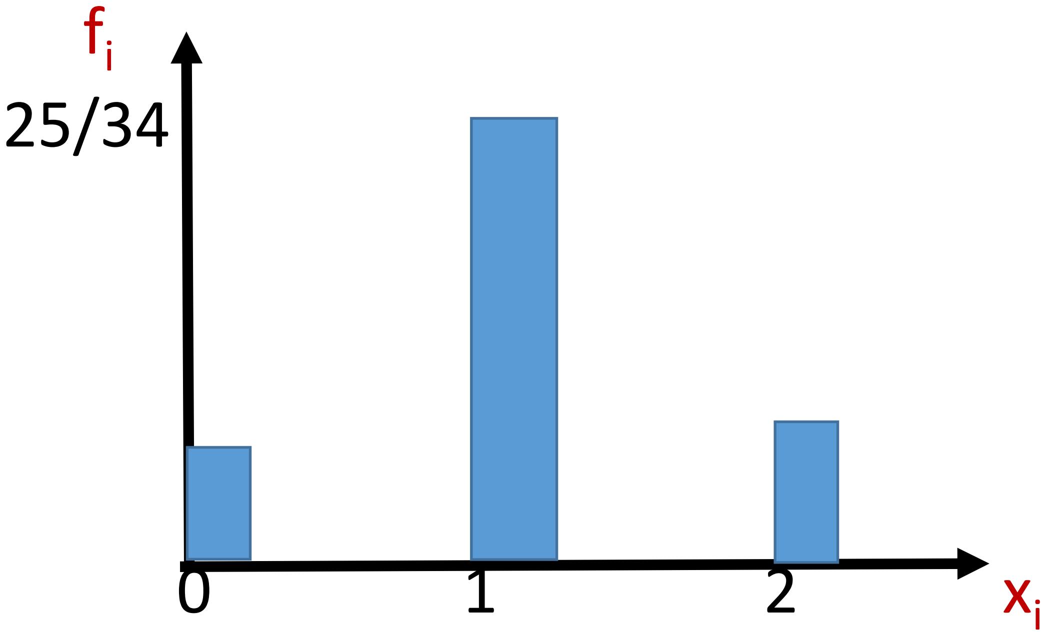
1) Diagrammes à bâtons ou à barres : uniquement pour les séries discrètes.

On obtient la même *forme* de graphique, que l'on étudie les effectifs ou les fréquences des valeurs de la série.

Exemple à partir du même exercice sur le nb de calculatrices :

x_i	0	1	2
n_i	4	25	5





III Représentations graphiques

1) Diagrammes à bâtons ou à barres : uniquement pour les séries discrètes.

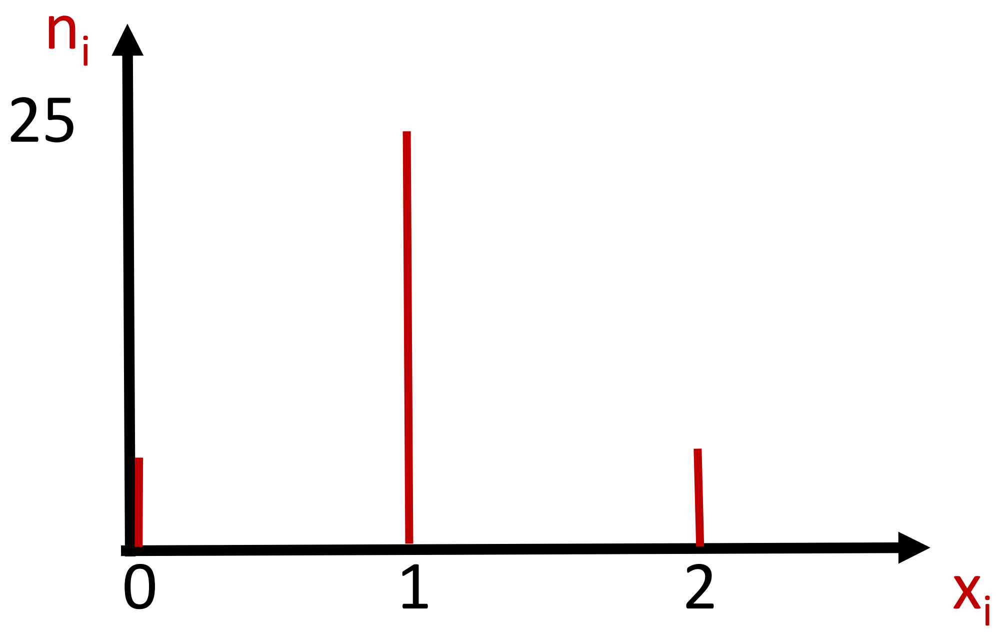
On obtient la même *forme* de graphique, que l'on étudie les effectifs ou les fréquences des valeurs de la série.

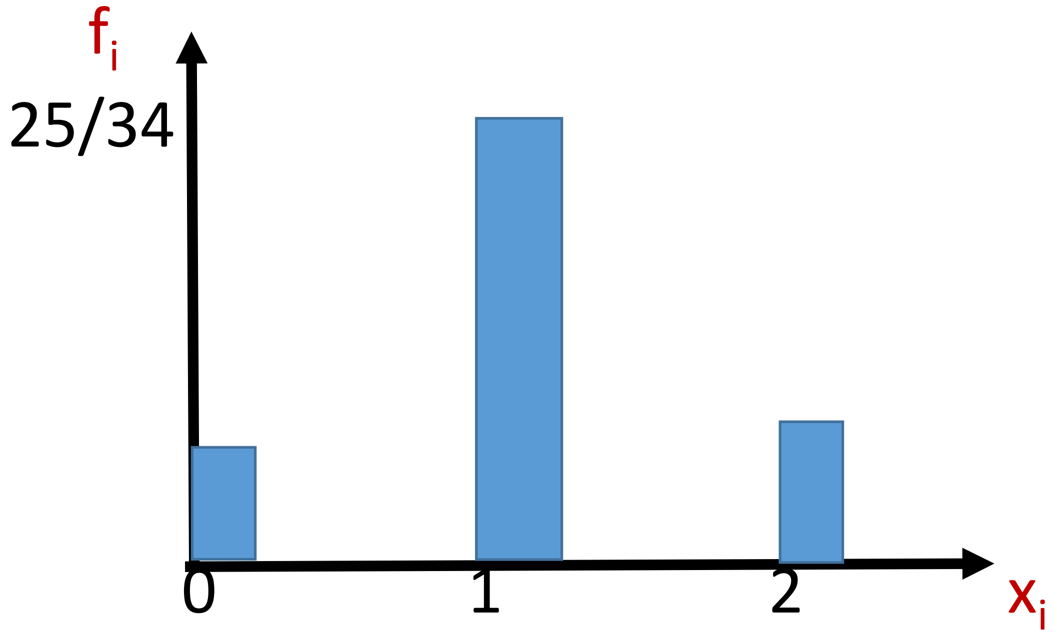
Exemple à partir du même exercice sur le nb de calculatrices :

x_i	0	1	2
n_i	4	25	5

Les fréquences sont proportionnelles aux effectifs

⇒ diagrammes de même forme (coeff. pr. N = 34)





2) **Diagrammes à secteurs** : appelés camemberts

Les angles a_i des secteurs angulaires sont proportionnels aux effectifs (donc aussi aux fréquences) des valeurs x_i.

$$\frac{a_1}{n_1} = \frac{a_2}{n_2} = \ldots = \frac{a_i}{n_i} = \frac{360°}{N} \qquad \text{donc } a_i = \frac{n_i \times 360}{N} = f_i \times 360$$

Exemple à partir du même exercice sur le nb de calculatrices :

x_i	0	1	2
n_i	4	25	5

2) **Diagrammes à secteurs** : appelés camemberts

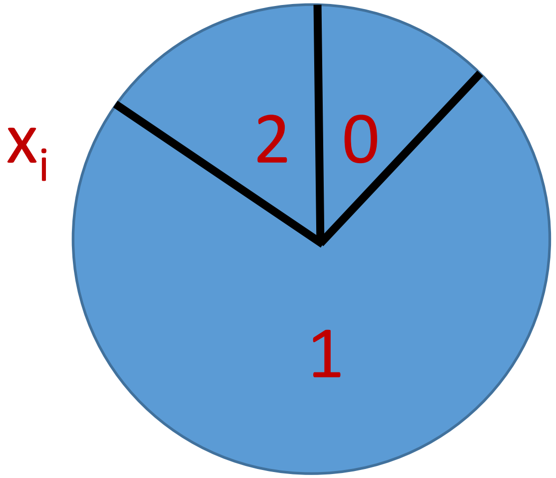
Les angles a_i des secteurs angulaires sont proportionnels aux effectifs (donc aussi aux fréquences) des valeurs x_i.

$$\frac{a_1}{n_1} = \frac{a_2}{n_2} = \ldots = \frac{a_i}{n_i} = \frac{360°}{N} \Rightarrow \boxed{a_i = \frac{n_i \times 360}{N}} = f_i \times 360$$

Exemple à partir du même exercice sur le nb de calculatrices :

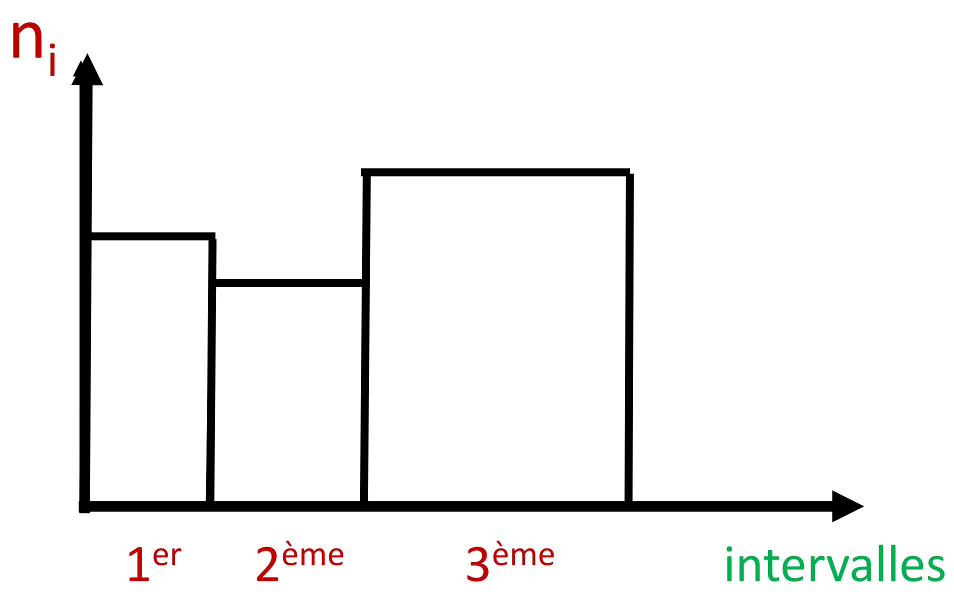
x_i	0	1	2
n_i	4	25	5

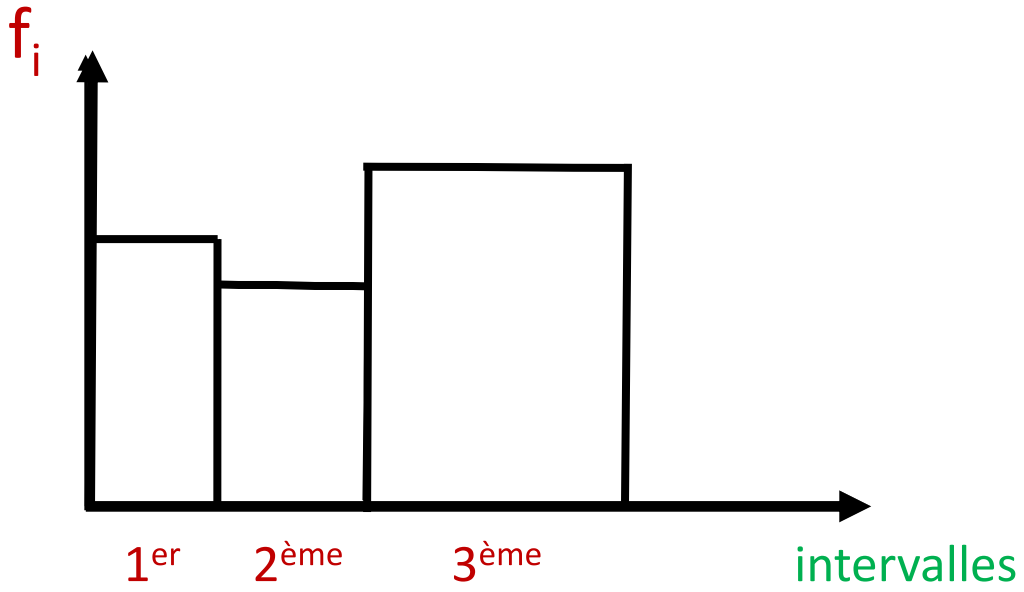
$$\frac{4}{34}\ 360 \approx 42° \qquad \frac{25}{34}\ 360 \approx 265° \qquad \frac{5}{34}\ 360 \approx 53°$$



3) **Histogrammes** : uniquement pour les séries continues.

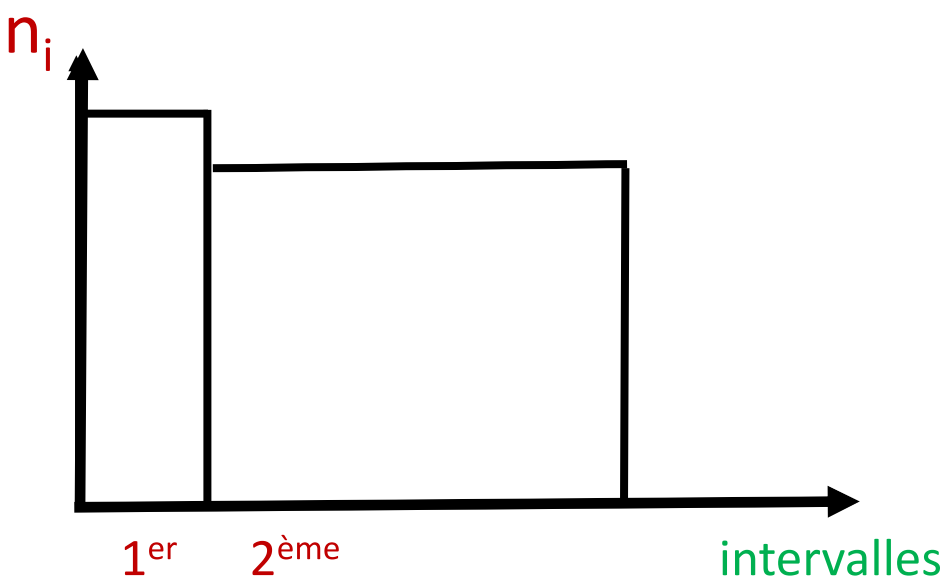
On obtient la même *forme* de graphique, que l'on étudie les effectifs ou les fréquences des intervalles (proportionnalité de coeff. pr. N)





3) **Histogrammes** : uniquement pour les séries continues.

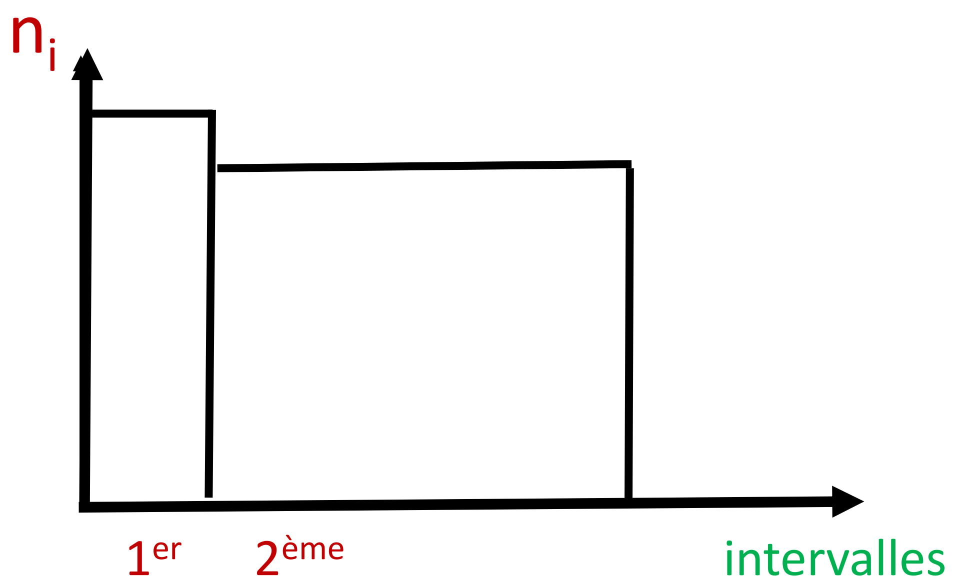
On obtient la même *forme* de graphique, que l'on étudie les effectifs ou les fréquences des intervalles (proportionnalité de coeff. pr. N)



Le 1er intervalle possède …

3) **Histogrammes** : uniquement pour les séries continues.

On obtient la même *forme* de graphique, que l'on étudie les effectifs ou les fréquences des intervalles (proportionnalité de coeff. pr. N)

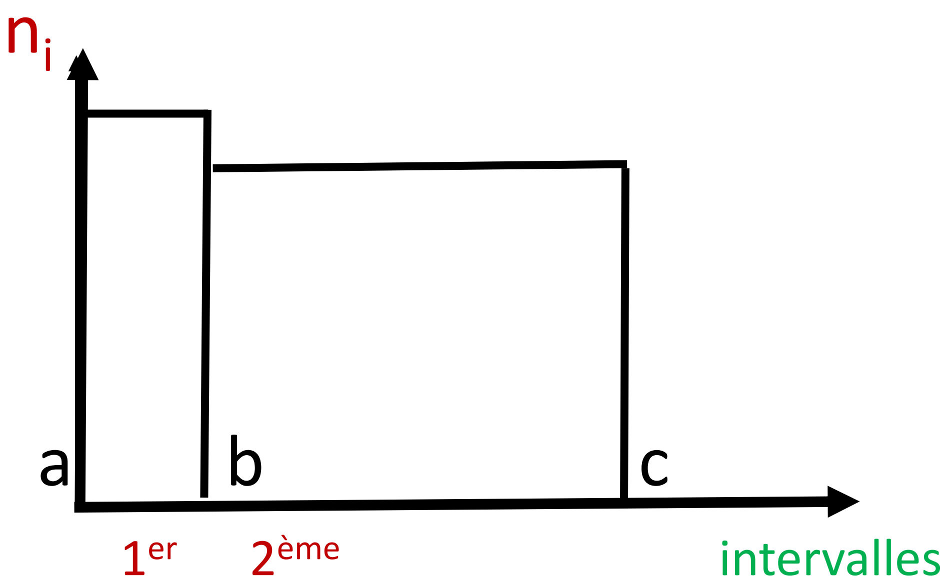


Le 1^{er} intervalle possède plus de valeurs que le $2^{ème}$

et ces valeurs …

3) **Histogrammes** : uniquement pour les séries continues.

On obtient la même *forme* de graphique, que l'on étudie les effectifs ou les fréquences des intervalles (proportionnalité de coeff. pr. N)



Le 1er intervalle possède plus de valeurs que le 2ème

et ces valeurs sont entre deux nombres a et b plus proches.

Exemple : Déterminez l'histogramme des fréquences de la série continue constituée des intervalles suivants :

[0 ; 6 [; [6 ; 10 [; [10 ; 13 [; [13 ; 20]

d'effectifs respectifs 5 ; 10 ; 8 ; 11.

Exemple : Déterminez l'histogrammes des fréquences de la série continue constituée des intervalles suivants : [0 ; 6 [; [6 ; 10 [; [10 ; 13 [; [13 ; 20] d'effectifs respectifs 5 ; 10 ; 8 ; 11.

$N = 5 + 10 + 8 + 11 = 34$ $\qquad f_i = n_i / N$