# Exercice 7 :

ABCD est un carré de côté a, ABE et BFC deux triangles équilatéraux, ABE à l'intérieur et BFC à l'extérieur du carré.

1°) Déterminez la hauteur h

d'un triangle équilatéral.

2°) Démontrez

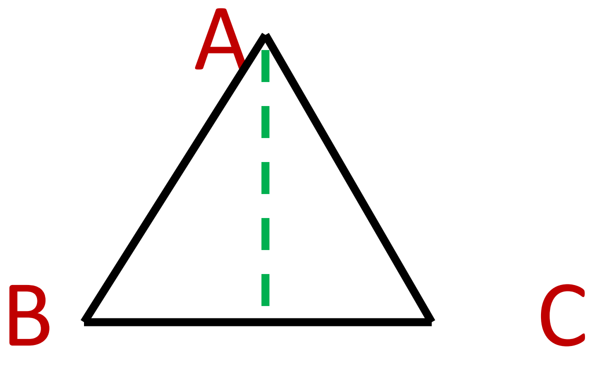
que les points D, E et F sont alignés

en utilisant le repère ( A ; $\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{AD}$ ).

# Exercice 7 :

ABCD est un carré de côté a, ABE et BFC deux triangles équilatéraux, ABE à l'intérieur et BFC à l'extérieur du carré.

1°) Déterminez la hauteur h d'un triangle équilatéral.

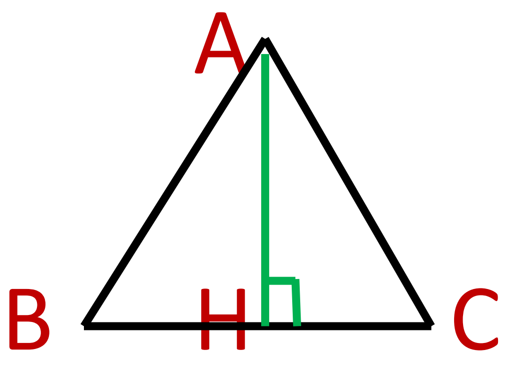


# Exercice 7 :

ABCD est un carré de côté a, ABE et BFC deux triangles équilatéraux, ABE à l'intérieur et BFC à l'extérieur du carré.

1°) Déterminez la hauteur h d'un triangle équilatéral.

AB = a



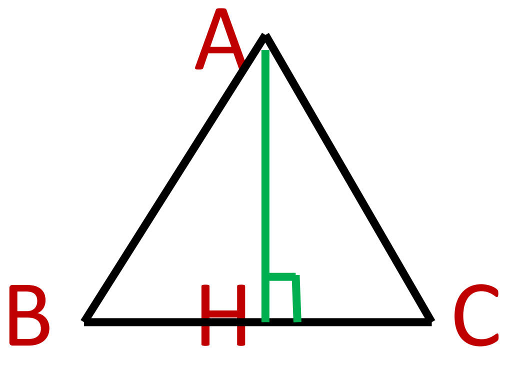

h = ?

# Exercice 7 :

ABCD est un carré de côté a, ABE et BFC deux triangles équilatéraux, ABE à l'intérieur et BFC à l'extérieur du carré.

1°) Déterminez la hauteur h d'un triangle équilatéral.

AB = a




h = … a

*Pythagore* dans AHB

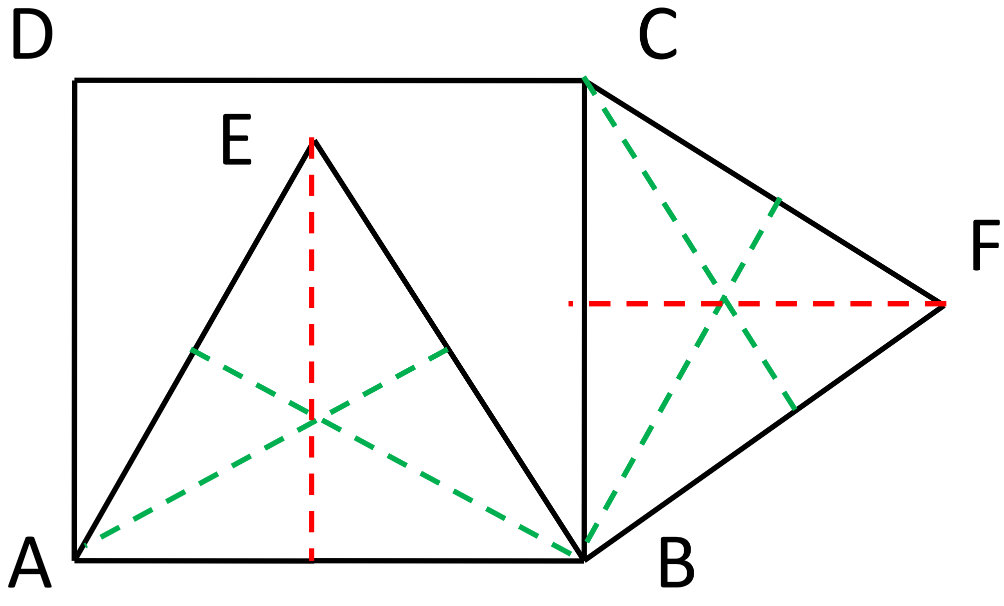
## Exercice 7 :

ABCD est un carré de côté a, ABE et BFC deux triangles équilatéraux, ABE à l’intérieur et BFC à l’extérieur du carré.

Schéma !

1°) Déterminez la hauteur h d’un triangle équilatéral.

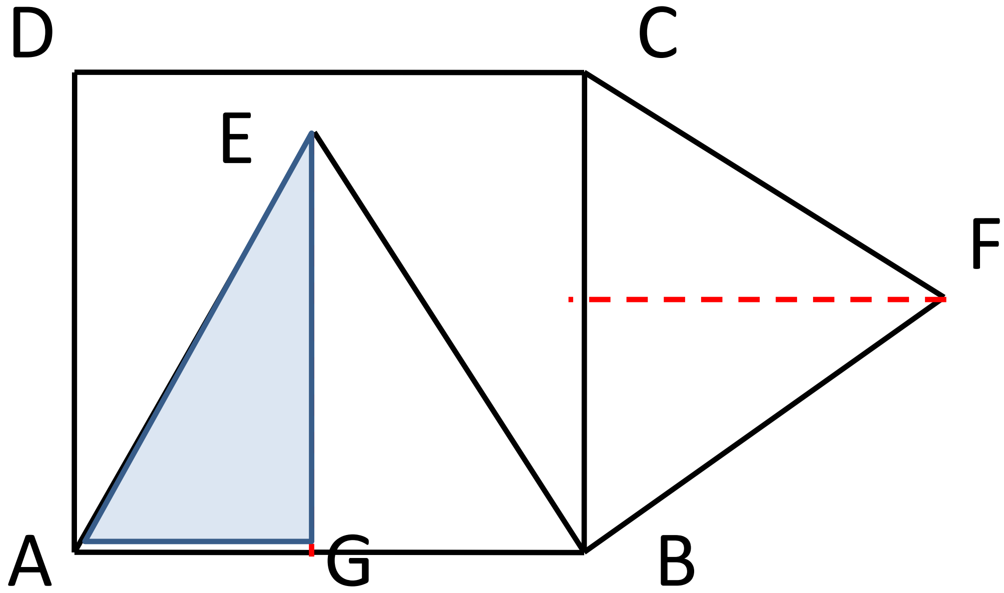
Schéma :



1°) Déterminez la hauteur h d'un triangle équilatéral.

Le triangle AEG est rectangle en G

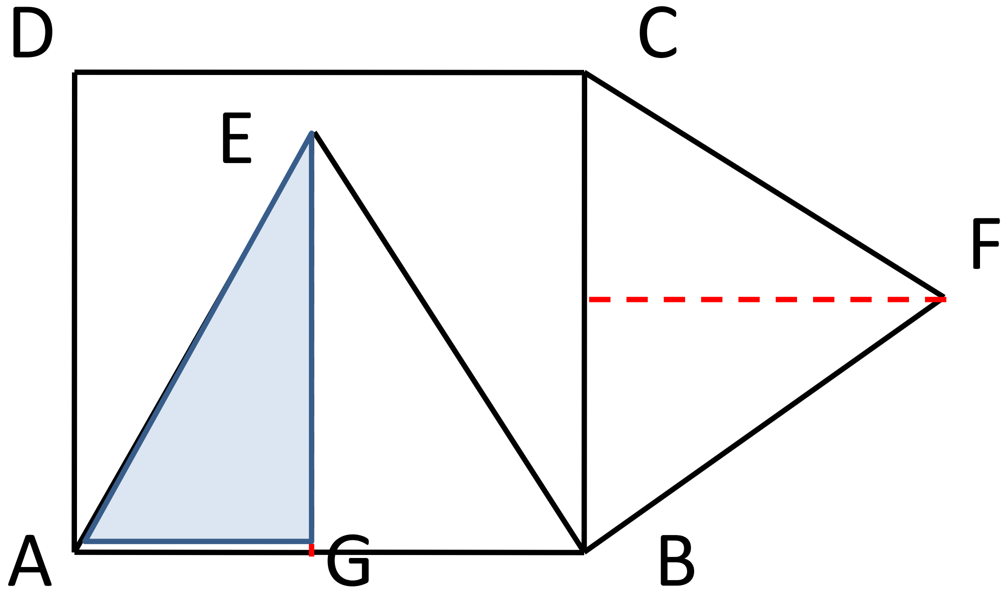
Pythagore : $AE^2 = EG^2 + AG^2 \Leftrightarrow \ldots^2 = \ldots^2 + \ldots^2$



# 1°) Déterminez la hauteur h d'un triangle équilatéral.

Le triangle AEG est rectangle en G

Pythagore : $AE^2 = EG^2 + AG^2 \Leftrightarrow a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h = \ldots$

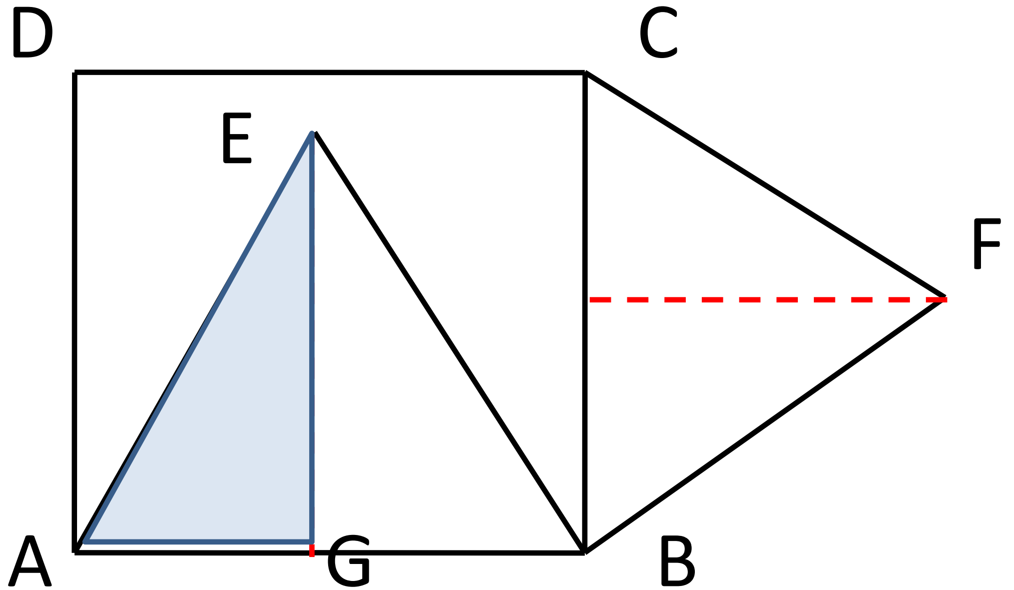


# 1°) Déterminez la hauteur h d'un triangle équilatéral.

Le triangle AEG est rectangle en G

Pythagore : $AE^2 = EG^2 + AG^2 \Leftrightarrow a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \ldots$

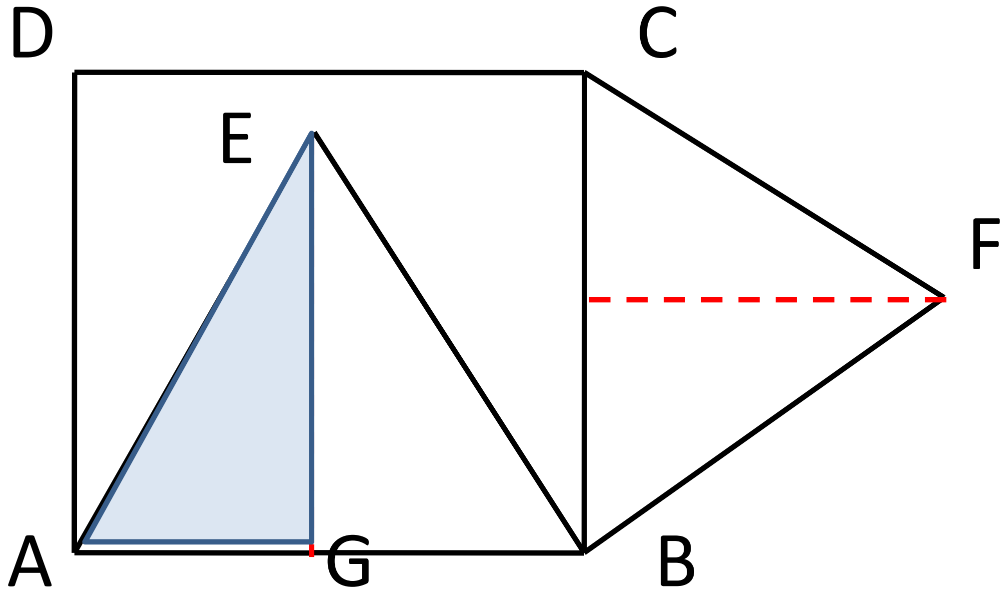


# 1°) Déterminez la hauteur h d'un triangle équilatéral.

Le triangle AEG est rectangle en G

Pythagore : $AE^2 = EG^2 + AG^2 \Leftrightarrow a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \ldots$

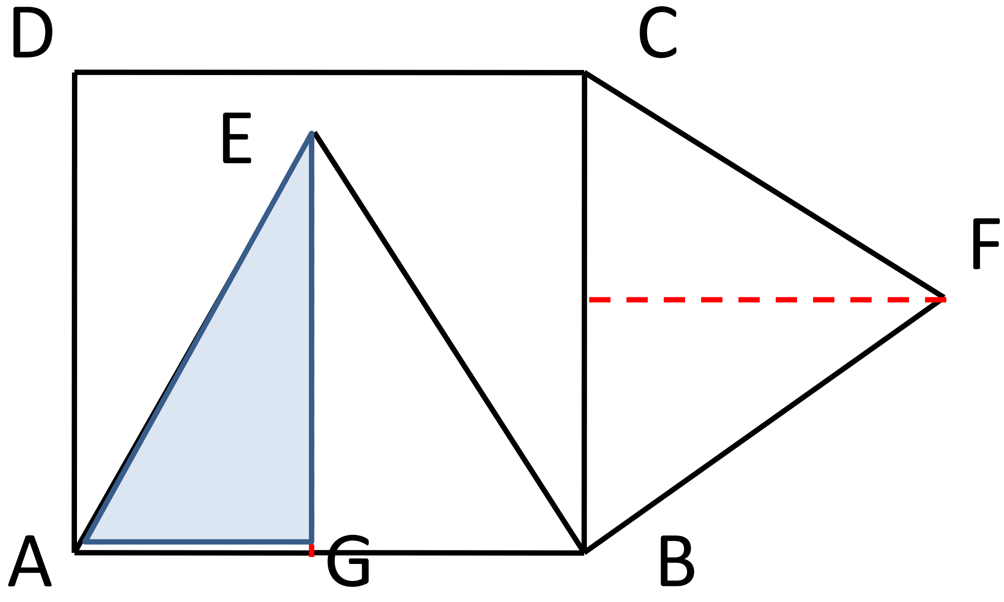


# 1°) Déterminez la hauteur h d'un triangle équilatéral.

Le triangle AEG est rectangle en G

Pythagore : $AE^2 = EG^2 + AG^2 \Leftrightarrow a^2 = h^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \ldots$$

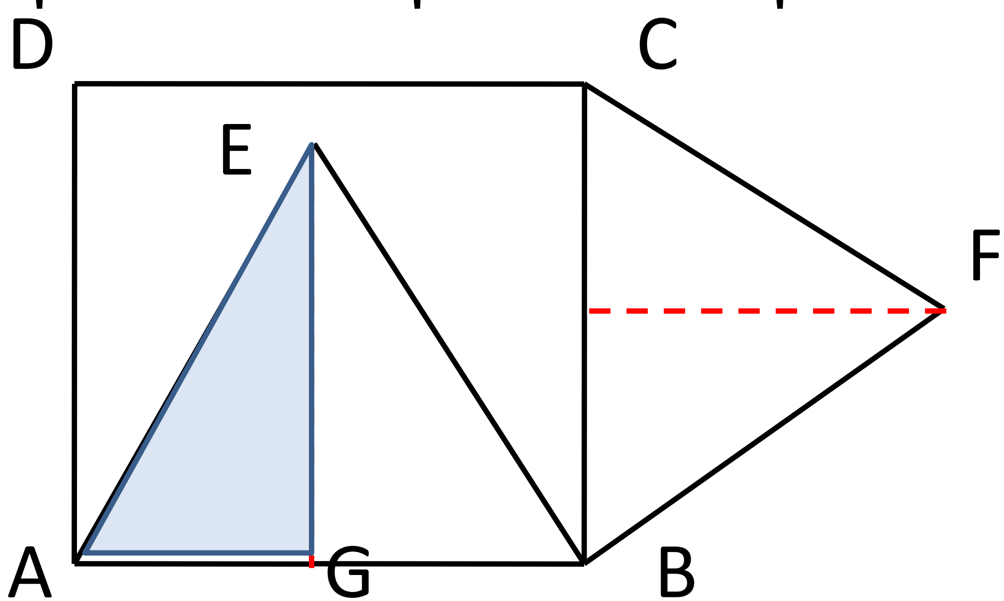


# 1°) Déterminez la hauteur h d'un triangle équilatéral.

Le triangle AEG est rectangle en G

Pythagore : $AE^2 = EG^2 + AG^2 \Leftrightarrow a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \mathbf{a}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

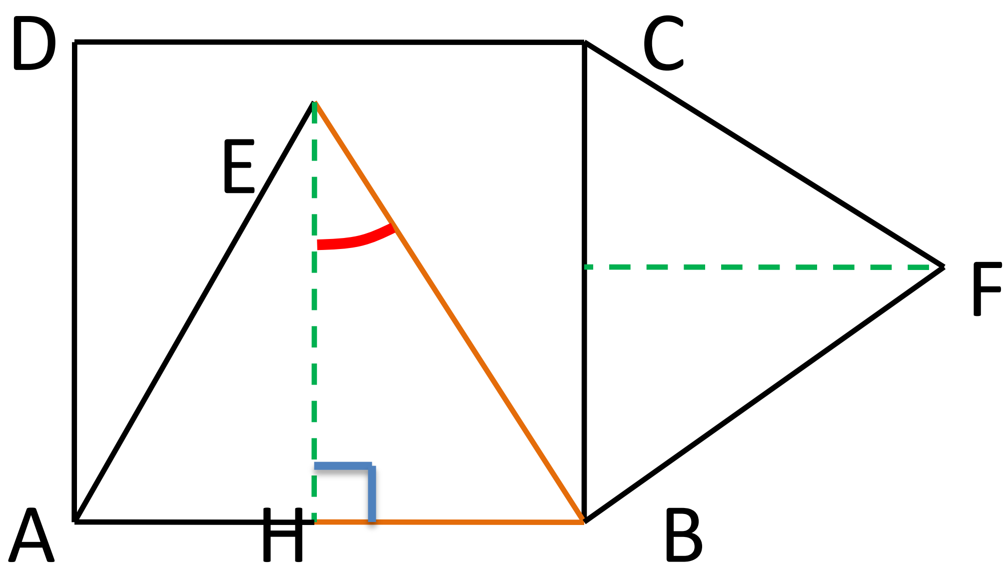


## $2^{\text{ème}}$ méthode :

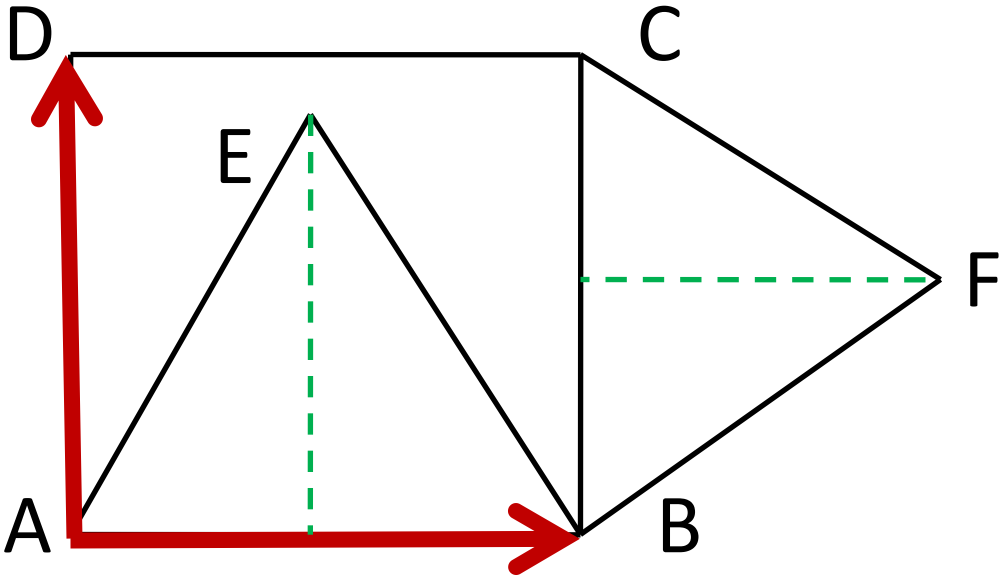
(EH) est une bissectrice de l'angle en E du triangle EAB, donc l'angle en E du triangle EHB est 60/2 = 30° donc π/6 ( radian ),

$$\text{et } \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{h}{a}$$

$$\text{donc } h = a \ \cos 30° = \mathbf{a}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$



2°) Démontrez que les points D, E et F sont alignés en utilisant le repère ( A ; $\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{AD}$ ).

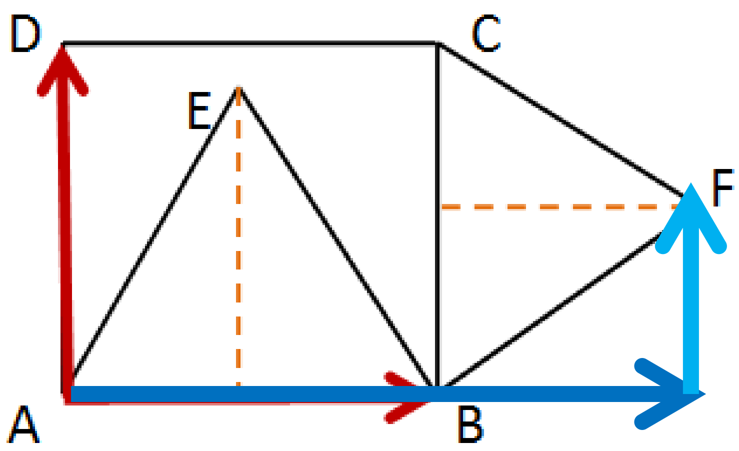


# Avec le repère $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD})$.

hauteur d'un triangle équilatéral = $a\frac{\sqrt{3}}{2}$

F a pour coordonnées ( x ; y ) dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD})$

signifie …




| | D | E | F |
|---|---|---|---|
| x | | | |
| y | | | |

# Avec le repère $( A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} )$.

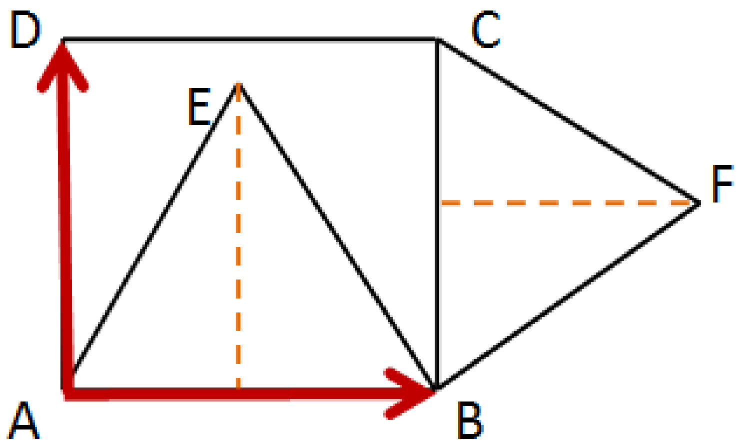
hauteur d'un triangle équilatéral = $a \frac{\sqrt{3}}{2}$

F a pour coordonnées ( x ; y ) dans le repère $( A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} )$

signifie $\overrightarrow{AF} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AD}$

On en déduit $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GF} = \ldots\ \overrightarrow{AB} + \ldots\ \overrightarrow{AD}$

⇒ F( … ; … )




| | D | E | F |
|---|---|---|---|
| x | | | … |
| y | | | … |

# Avec le repère $( A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} )$.

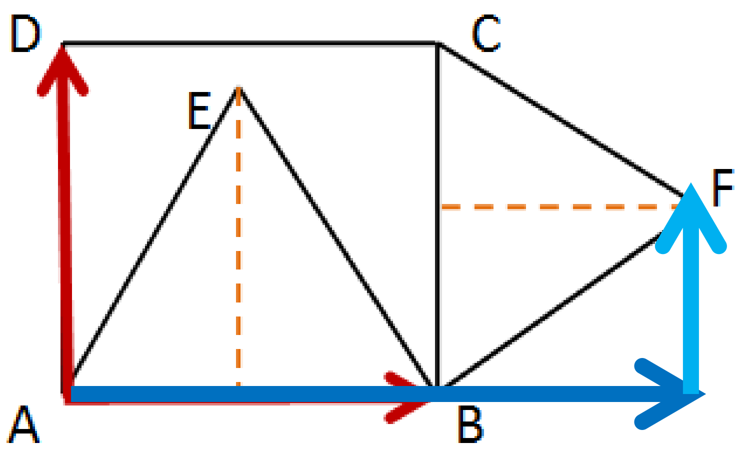
hauteur d'un triangle équilatéral = $a \frac{\sqrt{3}}{2}$

F a pour coordonnées ( x ; y ) dans le repère $( A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} )$

signifie $\overrightarrow{AF} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AD}$

On en déduit $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GF} = \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \overrightarrow{AB} + 0{,}5\,\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow$ F( ... ; ... )




| | D | E | F |
|---|---|---|---|
| x | | | |
| y | | | |

# Avec le repère ( A ; $\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{AD}$ ).

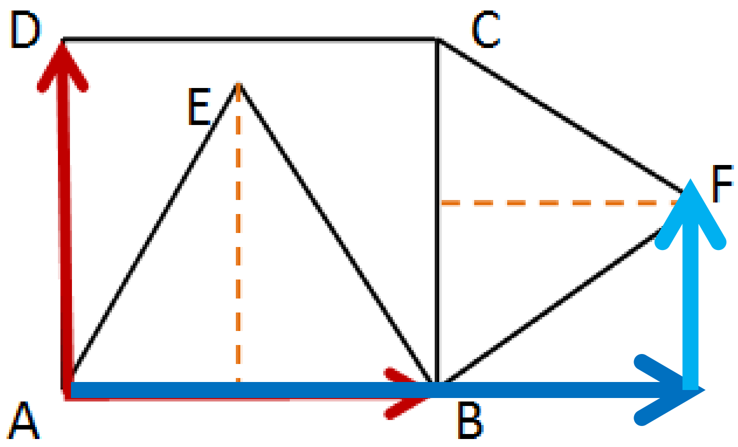
hauteur d'un triangle équilatéral = $a \frac{\sqrt{3}}{2}$

F a pour coordonnées ( x ; y ) dans le repère ( A ; $\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{AD}$ )

signifie $\overrightarrow{AF} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AD}$

On en déduit $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GF} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overrightarrow{AB} + 0{,}5\,\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow$ F( $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; $\frac{1}{2}$ )




| | D | E | F |
|---|---|---|---|
| x | | | |
| y | | | |

# Avec le repère $( A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} )$.

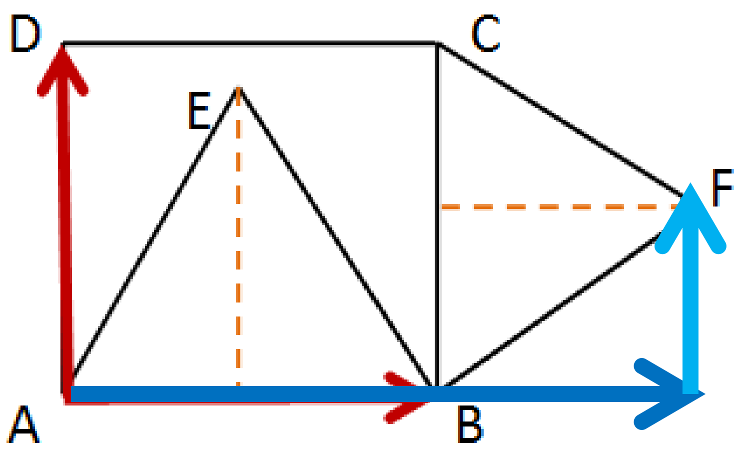
hauteur d'un triangle équilatéral = $a \frac{\sqrt{3}}{2}$

F a pour coordonnées ( x ; y ) dans le repère $( A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} )$

signifie $\overrightarrow{AF} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AD}$

On en déduit $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GF} = ( 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} ) \overrightarrow{AB} + 0,5 \overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow F( 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2} )$




| | D | E | F |
|---|---|---|---|
| x | | | $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| y | | | $\frac{1}{2}$ |

# Avec le repère $( A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} )$.

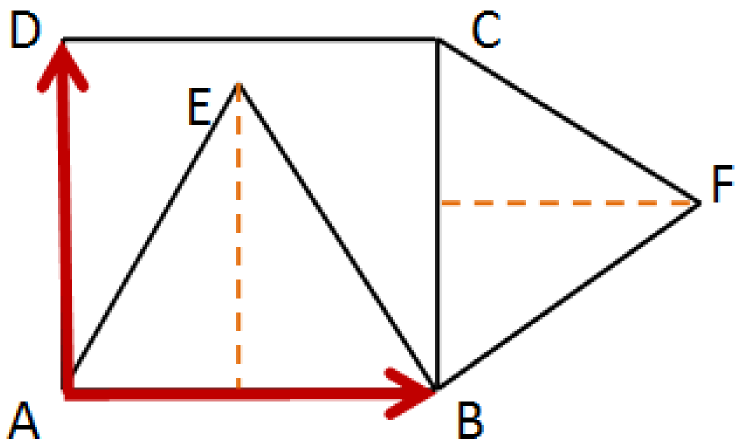
hauteur d'un triangle équilatéral = $a \frac{\sqrt{3}}{2}$

F a pour coordonnées ( x ; y ) dans le repère $( A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} )$

signifie $\overrightarrow{AF} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AD}$

On en déduit $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GF} = \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \overrightarrow{AB} + 0{,}5\,\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow F\left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2} \right)$




| | D | E | F |
|---|---|---|---|
| x | … | | $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| y | … | | $\frac{1}{2}$ |

Même méthode :

# Avec le repère $( A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} )$.

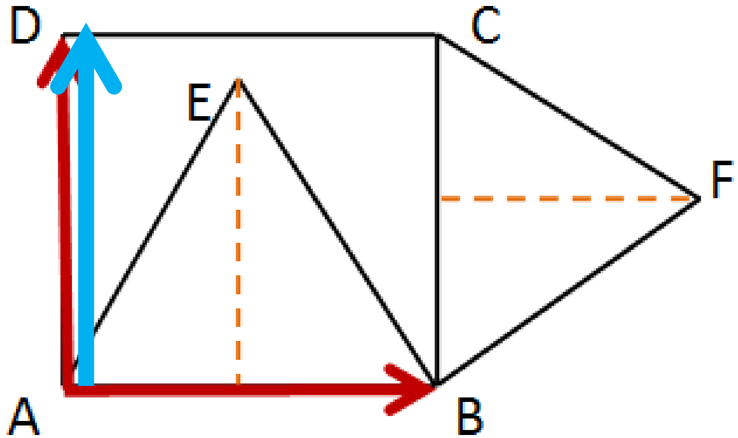
hauteur d'un triangle équilatéral = $a \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

F a pour coordonnées ( x ; y ) dans le repère $( A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} )$

signifie $\overrightarrow{AF} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AD}$

On en déduit $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GF} = \left( 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \right) \overrightarrow{AB} + 0{,}5\,\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow$ $F\left( 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1}{2} \right)$




| | D | E | F |
|---|---|---|---|
| x | 0 | … | $1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ |
| y | 1 | … | $\dfrac{1}{2}$ |

$\overrightarrow{AD} = 0\,\overrightarrow{AB} + 1\,\overrightarrow{AD}$

Même méthode :

# Avec le repère $( A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} )$.

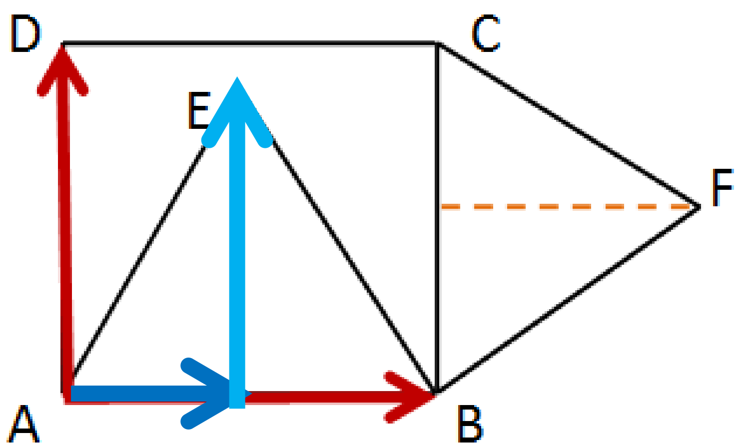
hauteur d'un triangle équilatéral = $a \frac{\sqrt{3}}{2}$

F a pour coordonnées ( x ; y ) dans le repère $( A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} )$

signifie $\overrightarrow{AF} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AD}$

On en déduit $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GF} = \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \overrightarrow{AB} + 0{,}5\,\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow F\left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2} \right)$




| | D | E | F |
|---|---|---|---|
| x | 0 | $\frac{1}{2}$ | $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| y | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

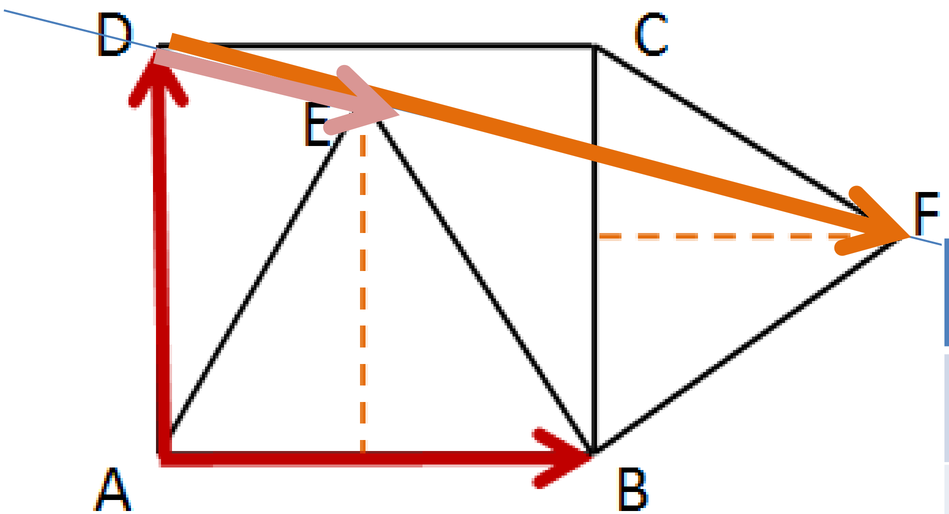
Même méthode :

$\overrightarrow{AD} = 0\,\overrightarrow{AB} + 1\,\overrightarrow{AD}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AE} = 0{,}5\,\overrightarrow{AB} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\overrightarrow{AD}$

3°) D, E et F alignés ? $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ **colinéaires ?**

$\overrightarrow{DF}$ = coordonnées …

$\overrightarrow{DE}$ = même méthode …    A-t-on **$x'y - xy' = 0$** ?




| | D | E | F |
|---|---|---|---|
| x | 0 | $\frac{1}{2}$ | $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| y | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

3°) D, E et F alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ colinéaires.

$$\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 0 \\ \\ \dfrac{1}{2} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} - 0 \\ \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}$$

| | D | E | F |
|---|---|---|---|
| x | 0 | $\frac{1}{2}$ | $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| y | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

3°) D, E et F alignés $\Longleftrightarrow \overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ colinéaires.

$$\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}$$

**x’ y – x y’** = …

3°) D, E et F alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ colinéaires.

$$\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}$$

$$x'\,y - x\,y' = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$$

3°) D, E et F alignés $\Longleftrightarrow \overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ colinéaires.

$$\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}$$

$$x'\,y - x\,y' = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$$

$$= -\frac{1}{4} - \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1^2\right)$$

$a - b \qquad a + b$

identité remarquable n° 3

$a^2 - b^2$

3°) D, E et F alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ colinéaires.

$$\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}$$

$$x'y - xy' = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$$

$$= -\frac{1}{4} - \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1^2\right) = -\frac{1}{4} - \left(\frac{3}{4} - 1\right)$$

3°) D, E et F alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ colinéaires.

$$x'y - xy' = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$$

$$= -\frac{1}{4} - \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1^2\right) = -\frac{1}{4} - \left(\frac{3}{4} - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1 = -1 + 1 = \mathbf{0}$$

3°) D, E et F alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ colinéaires.

$$x'\,y - x\,y' = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$$

$$= -\frac{1}{4} - \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1^2\right) = -\frac{1}{4} - \left(\frac{3}{4} - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1 = -1 + 1 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DE} \text{ et } \overrightarrow{DF} \text{ colinéaires}$$

$\Leftrightarrow$ D, E et F alignés