Exercice 15 :

Après une recherche à la calculatrice graphique, déterminez les sens de variations, et les ensembles de définition, des fonctions $f(x) = 2x^2 + 1$

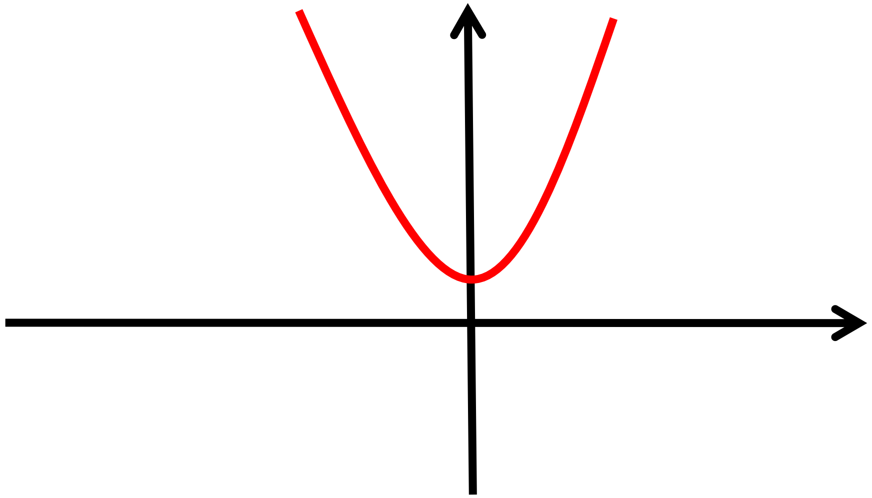
$$g(x) = \sqrt{8 - 2x} \qquad h(x) = \frac{2}{3x - 6}$$

Fonction f

définie par $f(x) = 2x^2 + 1$

sur $\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

Recherche à la calculatrice graphique :



x	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x)		↘		↗	

a et b deux antécédents quelconques de $\mathbb{R}$ et $a < b$

$f(b) - f(a) = (2b^2 + 1) - (2a^2 + 1)$

$= 2b^2 + 1 - 2a^2 - 1 = 2(b^2 - a^2) = 2(b - a)(b + a)$

$b - a > 0$ car $a < b$

Supposons a et b positifs

$\Longrightarrow b + a > 0 \Longrightarrow 2(b - a)(b + a) > 0$

$\Longleftrightarrow f(b) - f(a) > 0 \Longleftrightarrow f(b) > f(a)$

$f(b) - f(a) = (2b^2 + 1) - (2a^2 + 1)$

$= 2b^2 + 1 - 2a^2 - 1 = 2(b^2 - a^2) = 2(b - a)(b + a)$

$b - a > 0$ car $a < b$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)			$\nearrow$

Supposons a et b positifs

$\Rightarrow b + a > 0 \Rightarrow 2(b - a)(b + a) > 0$

$\Leftrightarrow f(b) - f(a) > 0 \Leftrightarrow f(b) > f(a)$

a et b deux antécédents

$a < b$ quelconques positifs de IR^+

$f(a) < f(b)$

$\Leftrightarrow$ la fct f est str. croissante sur IR^+

$f(b) - f(a) = (2b^2 + 1) - (2a^2 + 1)$

$= 2b^2 + 1 - 2a^2 - 1 = 2(b^2 - a^2) = 2(b - a)(b + a)$

$b - a > 0$ car $a < b$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	↘		↗

Supposons a et b négatifs

$\Rightarrow b + a < 0 \Rightarrow 2(b - a)(b + a) < 0$

$\Leftrightarrow f(b) - f(a) < 0 \Leftrightarrow f(b) < f(a)$

a et b deux antécédents quelconques négatifs de IR^-

$a < b$

$f(a) > f(b)$

$\Leftrightarrow$ la fct f est str. décroissante sur IR^-

Fonction g

définie par $g(x) = \sqrt{8 - 2x}$

$g(x)$ n'existe que si $8 - 2x \geq 0 \iff x$ …

$\Rightarrow D_g =$ …

Fonction g

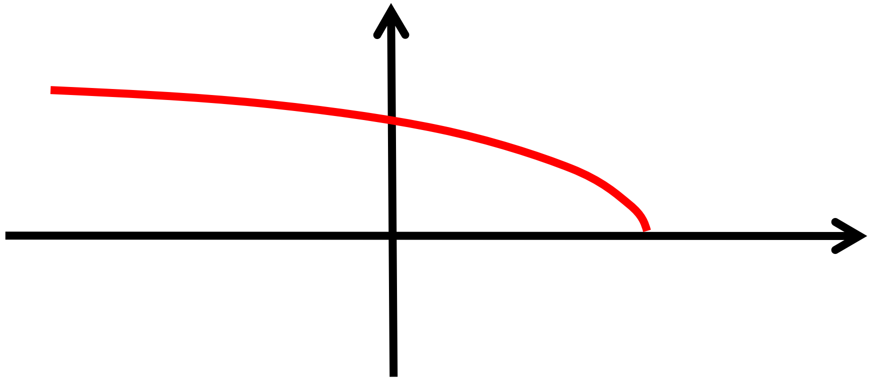
définie par $g(x) = \sqrt{8 - 2x}$

g(x) n’existe que si $8 - 2x \geq 0 \iff -2x \geq -8$

$\iff x \leq 4$

$\Rightarrow D_g =]-\infty\,;4]$

Recherche à la calculatrice graphique :



x	$-\infty$	4
f(x)	↘	

a et b deux antécédents quelconques de $]-\infty\,;4]$

et $a < b$

$g(b) - g(a) = \sqrt{8-2b} - \sqrt{8-2a}$

a et b deux antécédents quelconques de $]-\infty\,;4]$

et $a < b$

$g(b) - g(a) = \sqrt{8-2b} - \sqrt{8-2a}$

$\left(\sqrt{8-2b} - \sqrt{8-2a}\right) \times \ldots$

$= \overline{}$

$\ldots$

a et b deux antécédents quelconques de $]-\infty\,;4]$

et $a < b$

$$g(b) - g(a) = \sqrt{8-2b} - \sqrt{8-2a}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{8-2b} - \sqrt{8-2a}\right)\left(\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}\right)}{\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}}$$

a et b deux antécédents quelconques de] - ∞ ; 4]

et $a < b$

$$g(b) - g(a) = \sqrt{8-2b} - \sqrt{8-2a}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{8-2b} - \sqrt{8-2a}\right)\left(\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}\right)}{\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{8-2b}\right)^2 - \left(\sqrt{8-2a}\right)^2}{\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}}$$

car $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$

a et b deux antécédents quelconques de $]-\infty ; 4]$

et $a < b$

$$g(b) - g(a) = \sqrt{8-2b} - \sqrt{8-2a}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{8-2b} - \sqrt{8-2a}\right)\left(\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}\right)}{\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{8-2b}\right)^2 - \left(\sqrt{8-2a}\right)^2}{\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}} = \frac{(8-2b) - (8-2a)}{\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}}$$

a et b deux antécédents quelconques de $] -\infty ; 4]$

et $a < b$

$$g(b) - g(a) = \sqrt{8-2b} - \sqrt{8-2a}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{8-2b} - \sqrt{8-2a}\right)\left(\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}\right)}{\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{8-2b}\right)^2 - \left(\sqrt{8-2a}\right)^2}{\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}} = \frac{8 - 2b - 8 + 2a}{\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}}$$

a et b deux antécédents quelconques de $]-\infty\,;4]$

et $a < b$

$$g(b) - g(a) = \sqrt{8-2b} - \sqrt{8-2a}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{8-2b} - \sqrt{8-2a}\right)\left(\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}\right)}{\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{8-2b}\right)^2 - \left(\sqrt{8-2a}\right)^2}{\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}} = \frac{-2b + 2a}{\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}}$$

a et b deux antécédents quelconques de $] -\infty ; 4]$

et $a < b$

$$g(b) - g(a) = \sqrt{8-2b} - \sqrt{8-2a}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{8-2b} - \sqrt{8-2a}\right)\left(\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}\right)}{\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{8-2b}\right)^2 - \left(\sqrt{8-2a}\right)^2}{\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}} = \frac{-2(b-a)}{\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}}$$

a et b deux antécédents quelconques de] - ∞ ; 4] et $a < b$

$$g(b) - g(a) = \sqrt{8-2b} - \sqrt{8-2a} = \frac{-2\,(b-a)}{\sqrt{8-2b} + \sqrt{8-2a}}$$

$b - a > 0$ car $a < b$

$\sqrt{8-2b}$ et $\sqrt{8-2a}$ sont positifs

-2 est négatif ⇒ $g(b) - g(a) < 0$

x	- ∞ 4
g(x)	↘

a et b deux antécédents quelconques de] - ∞ ; 4]

$a < b$

$g(a) > g(b)$

⇔ la fct g est str. décroissante sur] - ∞ ; 4]

Fonction h

définie par $h(x) = \dfrac{2}{3x - 6}$

h(x) n'existe que si $3x - 6 \neq 0 \iff 3x \neq 6$

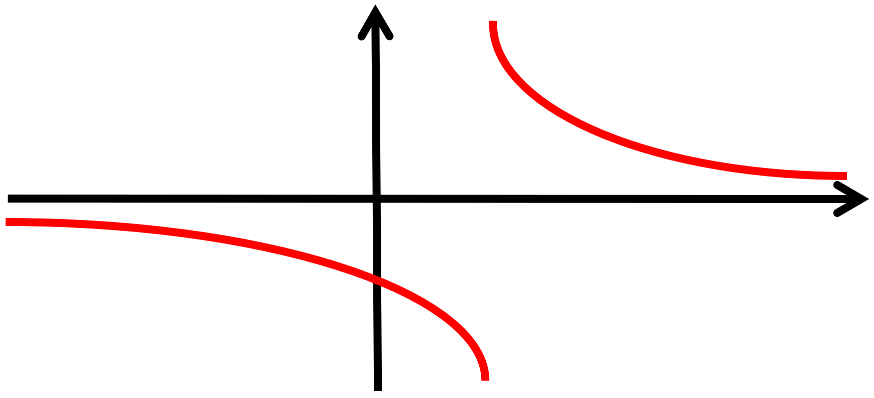
$\iff x \neq 2$

$\Rightarrow D_h = IR - \{ 2 \} =]-\infty ; 2 [\cup] 2 ; +\infty [$

définie par $h(x) = \dfrac{2}{3x - 6}$

sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$

Recherche à la calculatrice graphique :



x	$-\infty$		2		$+\infty$
f(x)		↘	‖	↘	

a et b deux antécédents quelconques de $]-\infty\,;2[\;\cup\;]2\,;+\infty[$

et $a < b$

$$h(b) - h(a) = \frac{2}{3b-6} - \frac{2}{3a-6}$$

$$= \frac{2\times(3a-6)}{(3b-6)\times(3a-6)} - \frac{2\times(3b-6)}{(3a-6)\times(3b-6)}$$

a et b deux antécédents quelconques de $] -\infty ; 2 [\cup] 2 ; +\infty [$

et $a < b$

$$h(b) - h(a) = \frac{2}{3b - 6} - \frac{2}{3a - 6}$$

$$= \frac{2 \times (3a - 6) - 2 \times (3b - 6)}{(3a - 6) \times (3b - 6)}$$

a et b deux antécédents quelconques de $]-\infty\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$

et $a < b$

$$h(b) - h(a) = \frac{2}{3b-6} - \frac{2}{3a-6}$$

$$= \frac{2\times(3a-6) - 2\times(3b-6)}{(3a-6)\times(3b-6)} = \frac{6a - 12 - 6b + 12}{(3a-6)\times(3b-6)}$$

a et b deux antécédents quelconques de $]-\infty\,;2[\ \cup\ ]2\,;+\infty[$

et $a < b$

$$h(b) - h(a) = \frac{2}{3b-6} - \frac{2}{3a-6}$$

$$= \frac{2\times(3a-6) - 2\times(3b-6)}{(3a-6)\times(3b-6)} = \frac{6a-6b}{(3a-6)\times(3b-6)}$$

a et b deux antécédents quelconques de $]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

et $a < b$

$$h(b) - h(a) = \frac{2}{3b - 6} - \frac{2}{3a - 6}$$

$$= \frac{2\times(3a - 6) - 2\times(3b - 6)}{(3a - 6)\times(3b - 6)} = \frac{6(a - b)}{(3a - 6)\times(3b - 6)}$$

a et b deux antécédents quelconques de $]-\infty\,;2\,[\ \cup\ ]\,2\,;+\infty[$

$a < b$

$$f(b) - f(a) = \frac{6(a-b)}{(3a-6)\times(3b-6)}$$

Supposons $(3a-6)$ et $(3b-6)$ positifs stricts

$3a - 6 > 0 \Leftrightarrow 3a > 6 \Leftrightarrow a > 2$ et $b > 2$

$a - b < 0$ car $a < b \Rightarrow h(b) - h(a) < 0$

a et b deux antécédents quelconques de $] -\infty ; 2 [\cup] 2 ; +\infty [$

$a < b$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f(x)		$\|\|$	$\searrow$

$$f(b) - f(a) = \frac{6(a-b)}{(3a-6)\times(3b-6)}$$

Supposons $(3a - 6)$ et $(3b - 6)$ positifs stricts

$3a - 6 > 0 \iff 3a > 6 \iff a > 2$ et $b > 2$

$a - b < 0$ car $a < b \implies h(b) - h(a) < 0$

a et b deux antécédents quelconques de $] 2 ; +\infty [$

$a < b$

$f(a) > f(b)$

$\iff$ la fct h est str. décroissante sur $] 2 ; +\infty [$

a et b deux antécédents quelconques de $]-\infty\,;2[\ \cup\ ]2\,;+\infty[$

$a < b$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f(x)	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

$$f(b) - f(a) = \frac{6\,(a - b)}{(3a - 6) \times (3b - 6)}$$

Supposons $(3a - 6)$ et $(3b - 6)$ négatifs stricts

$3a - 6 < 0 \Leftrightarrow 3a < 6 \Leftrightarrow a < 2$ et $b < 2$

$a - b < 0$ car $a < b$ $\Rightarrow$ $h(b) - h(a) < 0$

a et b deux antécédents quelconques de $]-\infty\,;2[$

$a < b$

$f(a) > f(b)$

$\Leftrightarrow$ la fct h est str. décroissante sur $]-\infty\,;2[$