Exercice 14 :

Après une recherche à la calculatrice graphique, déterminez les sens de variations, et les ensembles de définition, des fonctions carré, racine carrée, et inverse.

Fonction carré

définie par …

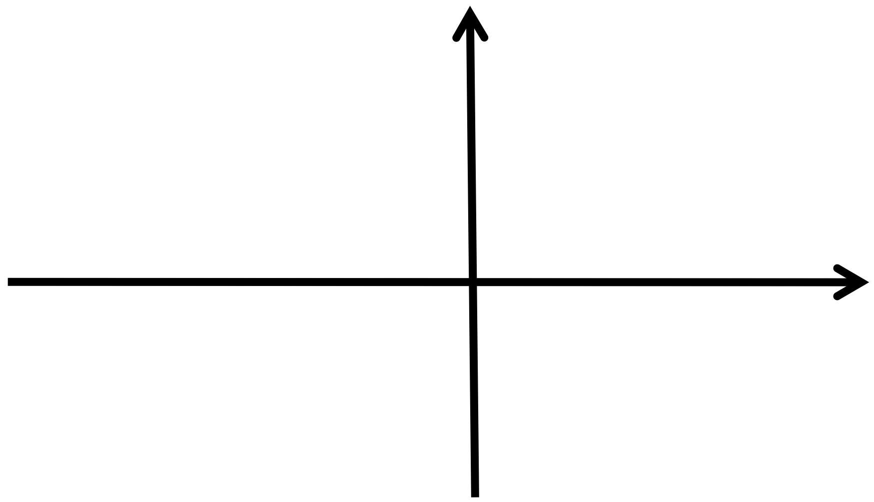
sur …

Fonction carré

définie par $f(x) = x^2$

sur $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$

Recherche à la calculatrice graphique :



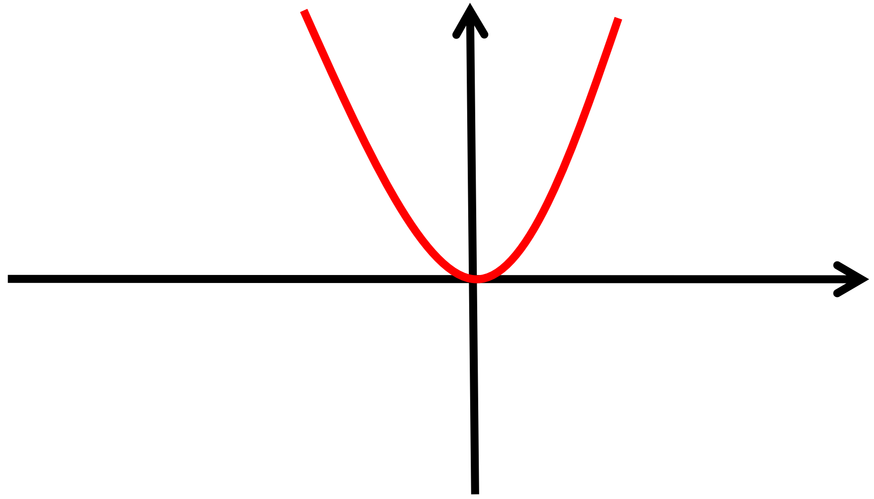
x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)		

Fonction carré

définie par $f(x) = x^2$

sur $\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

Recherche à la calculatrice graphique :



x	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x)		$\searrow$		$\nearrow$	

Fonction carré

définie par $f(x) = x^2$ sur IR

a et b deux antécédents quelconques de IR

$a < b$

$f(b) - f(a) = b^2 - a^2$ est de quel signe ?

Fonction carré

définie par $f(x) = x^2$ sur IR

a et b deux antécédents quelconques de IR

$a < b$

$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b - a) (b + a)$

identité remarquable n° 3

a et b deux antécédents quelconques de IR et $a < b$

$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$

$b - a > 0$ car $a < b$

Supposons a et b positifs

$\Rightarrow b + a > 0 \Rightarrow (b - a)(b + a) > 0$

$\Leftrightarrow f(b) - f(a) > 0 \Leftrightarrow f(b) > f(a)$

a et b deux antécédents quelconques de IR et $a < b$

$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$

$b - a > 0$ car $a < b$

Supposons a et b positifs

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)			

$\Rightarrow b + a > 0 \Rightarrow (b - a)(b + a) > 0$

$\Leftrightarrow f(b) - f(a) > 0 \Leftrightarrow f(b) > f(a)$

a et b deux antécédents quelconques positifs de IR^+

$a < b$

$f(a) < f(b)$

$\Leftrightarrow$ la fct carré est str. croissante sur IR^+

a et b deux antécédents quelconques de $\mathbb{R}$ et $a < b$

$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$

$b - a > 0$ car $a < b$

Supposons a et b négatifs

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)		↗	

a et b deux antécédents quelconques de IR et $a < b$

$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$

$b - a > 0$ car $a < b$

Supposons a et b négatifs

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	$\searrow$		$\nearrow$

$\Rightarrow b + a < 0 \Rightarrow (b - a)(b + a) < 0$

$\Leftrightarrow f(b) - f(a) < 0 \Leftrightarrow f(b) < f(a)$

a et b deux antécédents quelconques négatifs de IR^-

$a < b$

$f(a) > f(b)$

$\Leftrightarrow$ la fct carré est str. décroissante sur IR^-

Fonction racine carré

définie par …

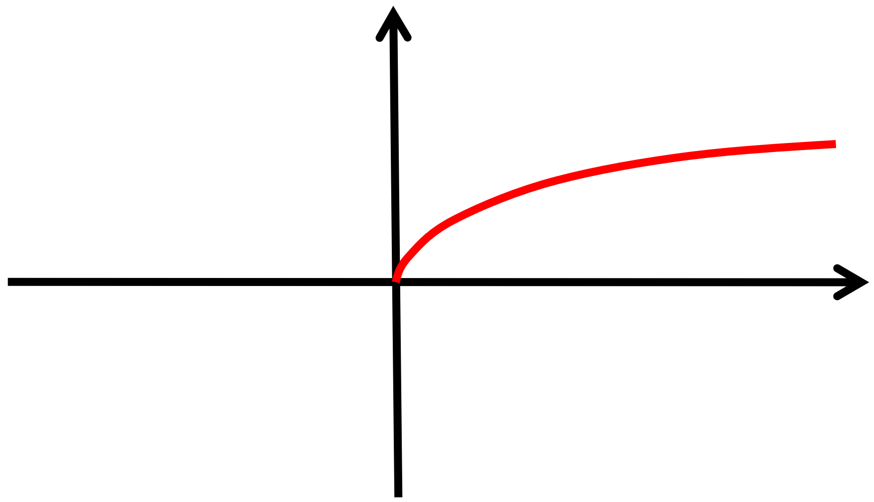
sur …

Fonction racine carré

définie par $f(x) = \sqrt{x}$

sur $\mathbb{R}^+ = [\,0\,;+\infty\,[$

Recherche à la calculatrice graphique :



x	0	$+\infty$
f(x)	$\nearrow$	

a et b deux antécédents quelconques de $\mathbb{R}^+$ et $a < b$

$$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\quad \dots \quad)}{(\quad \dots \quad)}$$

a et b deux antécédents quelconques de $\mathbb{R}^+$ et $a < b$

$$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})}$$

a et b deux antécédents quelconques de $\mathbb{R}^+$ et $a < b$

$$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a})^2}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

identité remarquable n° 3

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$$

a et b deux antécédents quelconques de $\mathbb{R}^+$ et $a < b$

$$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a})^2}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

a et b deux antécédents quelconques de $\mathbb{R}^+$ et $a < b$

$$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a})^2}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

$b - a > 0$ car $a < b$ et $\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}$ sont positifs $\Rightarrow$ $f(b) - f(a) > 0$

Remarque : Une racine carrée est-elle toujours positive ?

a et b deux antécédents quelconques de $\mathbb{R}^+$ et $a < b$

$$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a})^2}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

$b - a > 0$ car $a < b$ et $\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}$ sont positifs $\Rightarrow$ $f(b) - f(a) > 0$

Remarque : Une racine carrée est-elle toujours positive ?

Uniquement si elle existe ! $\sqrt{25} = 5 > 0$ mais $\sqrt{-25}$ n'existe pas donc ne peut être un réel, donc ne peut être positive.

a et b deux antécédents quelconques de $\mathbb{R}^+$ et $a < b$

$$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{(\sqrt{b} + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a})^2}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

x	0	$+\infty$
f(x)	$\nearrow$	

$b - a > 0$ car $a < b$ et $\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}$ sont positifs $\Rightarrow$ $f(b) - f(a) > 0$

a et b deux antécédents
$a < b$ quelconques positifs de $\mathbb{R}^+$
$f(a) < f(b)$

$\Leftrightarrow$ la fct racine carrée est str. croissante sur $\mathbb{R}^+$

Fonction inverse

définie par …

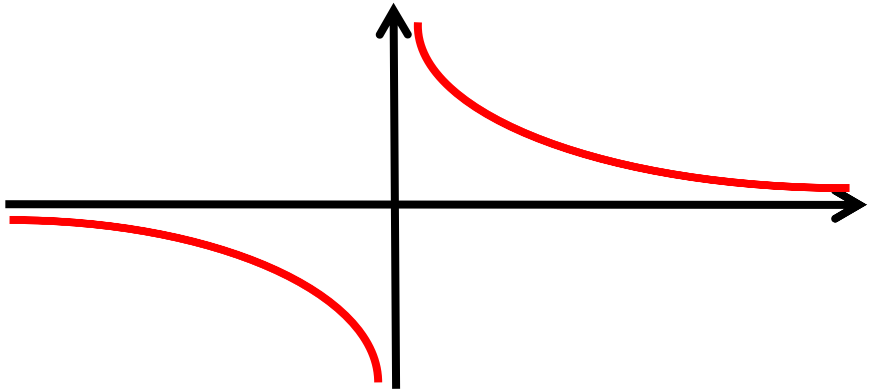
sur …

Fonction inverse

définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ on ne peut diviser par 0

sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$

Recherche à la calculatrice graphique :



x	- ∞		0		+ ∞
f(x)		↘	‖	↘	

a et b deux antécédents quelconques de $\mathbb{R}^+$ et $a < b$

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1\times a}{b\times a} - \frac{1\times b}{a\times b} = \frac{a-b}{ab}$$

Supposons a et b

positifs

a et b deux antécédents quelconques de $\mathbb{R}^+$ et $a < b$

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1 \times a}{b \times a} - \frac{1 \times b}{a \times b} = \frac{a - b}{ab}$$

Supposons a et b

positifs

$a - b < 0$ car $a < b$ et ab est positif $\Rightarrow$ $f(b) - f(a) < 0$

a et b deux antécédents quelconques de IR^{+} et $a < b$

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1\times a}{b\times a} - \frac{1\times b}{a\times b} = \frac{a-b}{ab}$$

Supposons a et b positifs

x	- ∞	0	+ ∞
f(x)		‖	

$a - b < 0$ car $a < b$ et ab est positif ⇒ $f(b) - f(a) < 0$

a et b deux antécédents
$a < b$
$f(a) > f(b)$
quelconques positifs de IR^{*+}

⟺ la fct inverse est str. décroissante sur IR^{*+}

a et b deux antécédents quelconques de IR$^+$ et $a < b$

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1 \times a}{b \times a} - \frac{1 \times b}{a \times b} = \frac{a - b}{ab}$$

Supposons a et b négatifs

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

$a - b < 0$ car $a < b$ et ab est positif $\Rightarrow$ $f(b) - f(a) < 0$

a et b deux antécédents quelconques négatifs de IR^{*-}

$a < b$

$f(a) > f(b)$

$\Leftrightarrow$ la fct inverse est str. décroissante sur IR^{*-}