

Algorithme de Dichotomie

du grec « **dicho** » (**en deux**)

et « **tomie** » (**couper**, comme dans vasectomie, appendicectomie, atome, anatomie...).

On cherche **la solution approchée**

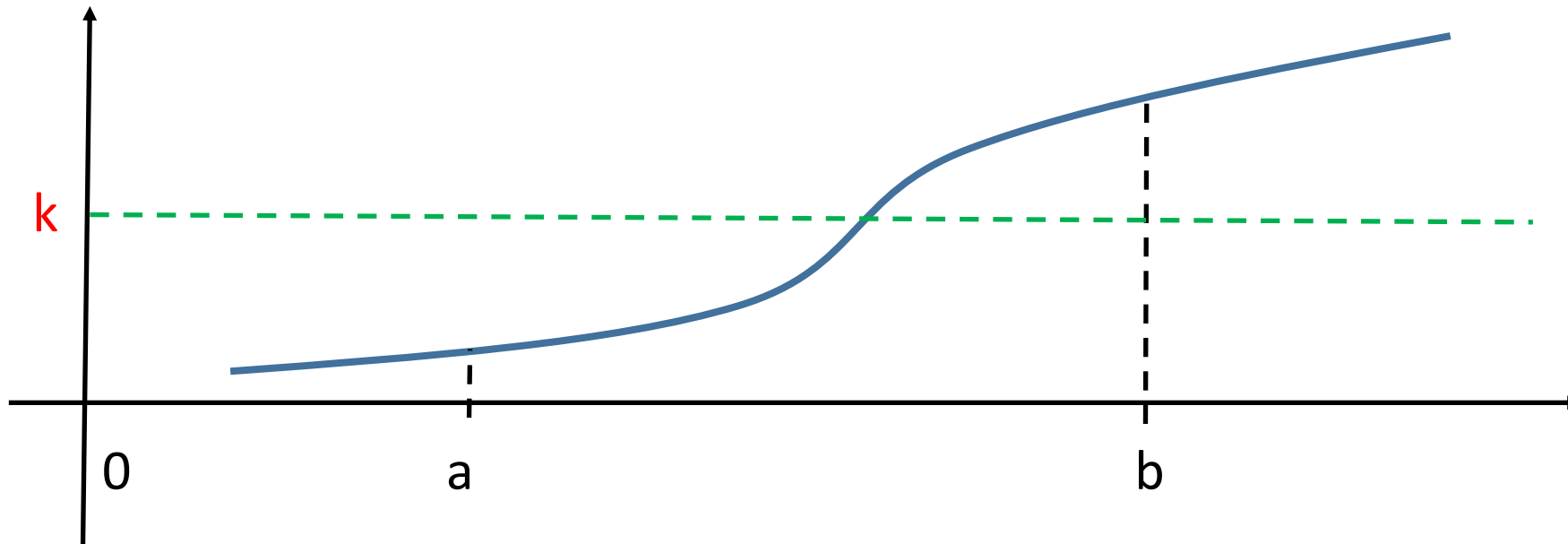
d'une équation du type **$f(x) = k$**

dans un intervalle $[a ; b]$ où **f est monotone.**

Algorithme de Dichotomie

du grec « **dicho** » (**en deux**) et « **tomie** » (**couper**, comme dans vasectomie, appendicectomie, atome, anatomie...).

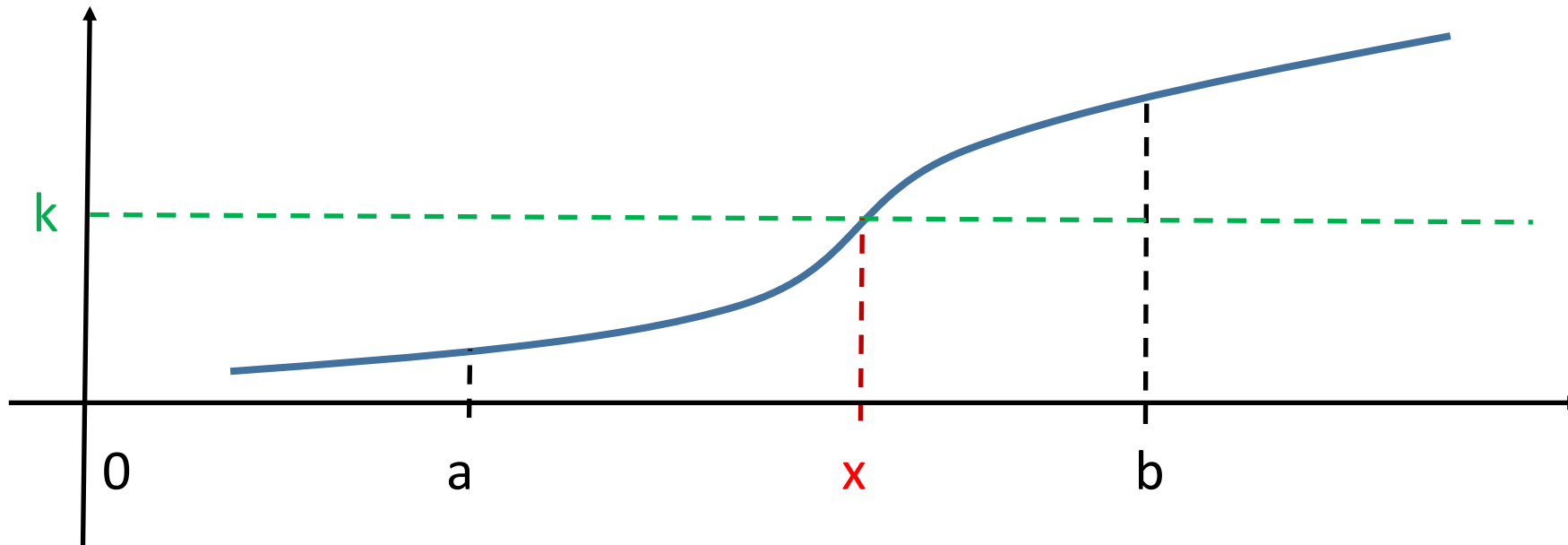
On cherche la solution approchée **x** dans un intervalle $[a ; b]$ d'une équation du type $f(x) = k$, où **f** est une fonction monotone (ayant un seul sens de variation) sur cet intervalle.



Algorithme de Dichotomie

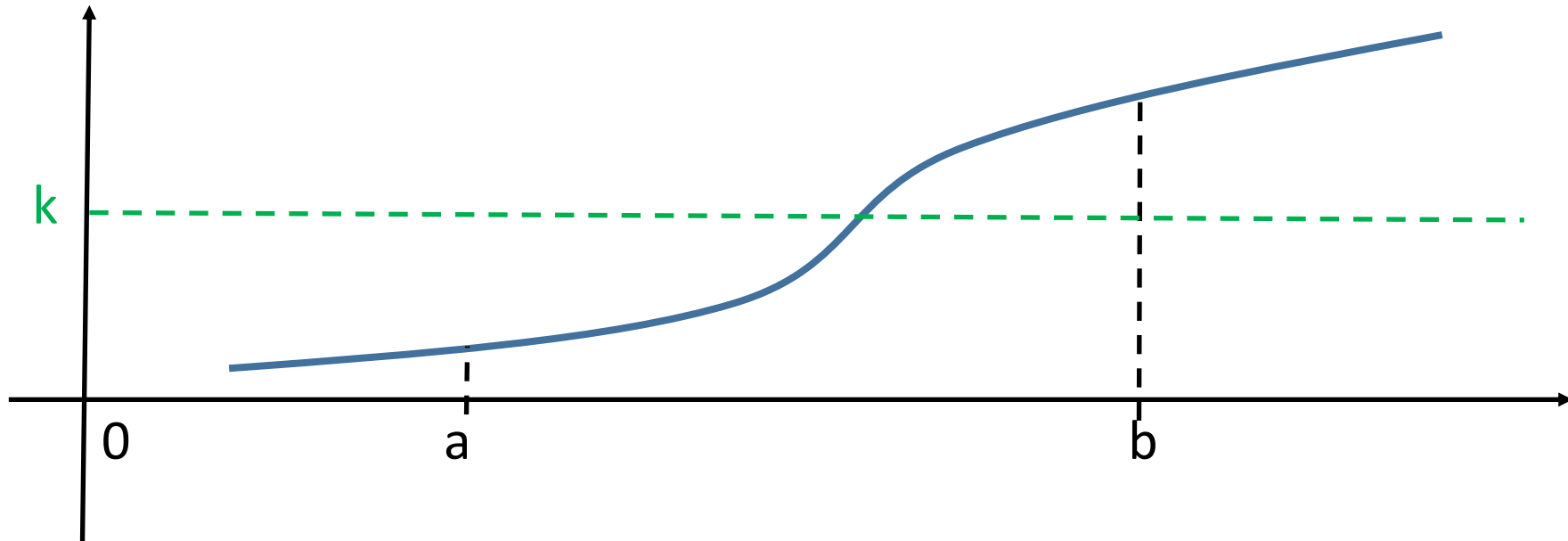
du grec « **dicho** » (**en deux**) et « **tomie** » (**couper**, comme dans vasectomie, appendicectomie, atome, anatomie...).

On cherche la solution approchée **x** dans un intervalle $[a ; b]$ d'une équation du type $f(x) = k$, où **f** est une fonction monotone (ayant un seul sens de variation) sur cet intervalle.



Algorithme de Dichotomie

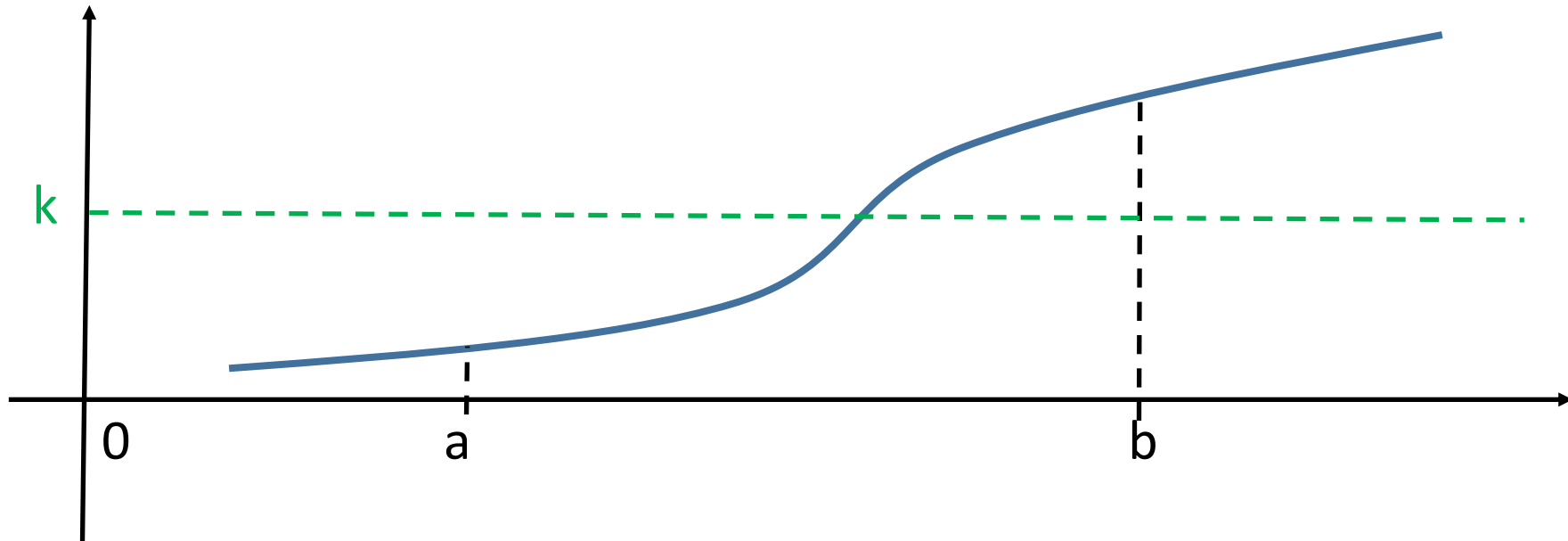
On va ... l'intervalle $[a ; b]$ en déterminant ...



Algorithme de Dichotomie

On va **couper en deux** l'intervalle $[a ; b]$ en déterminant **son milieu c** .

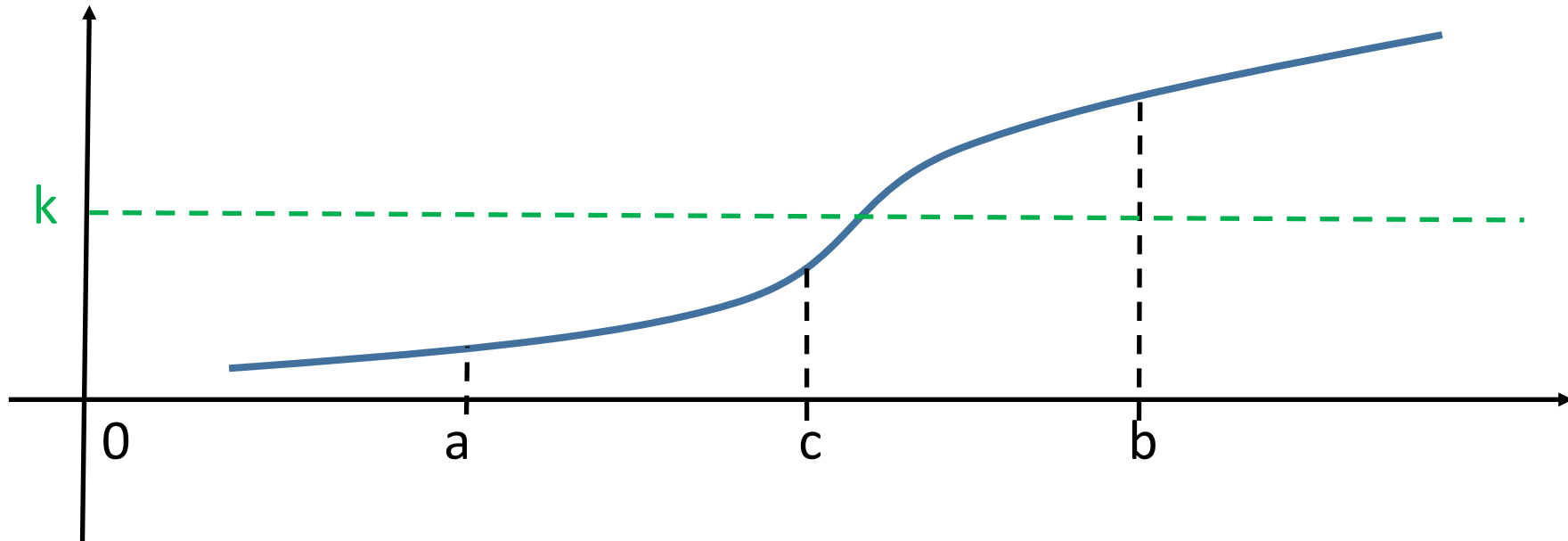
$c = \dots$



Algorithme de Dichotomie

On va **couper en deux** l'intervalle $[a ; b]$ en déterminant **son milieu c** .

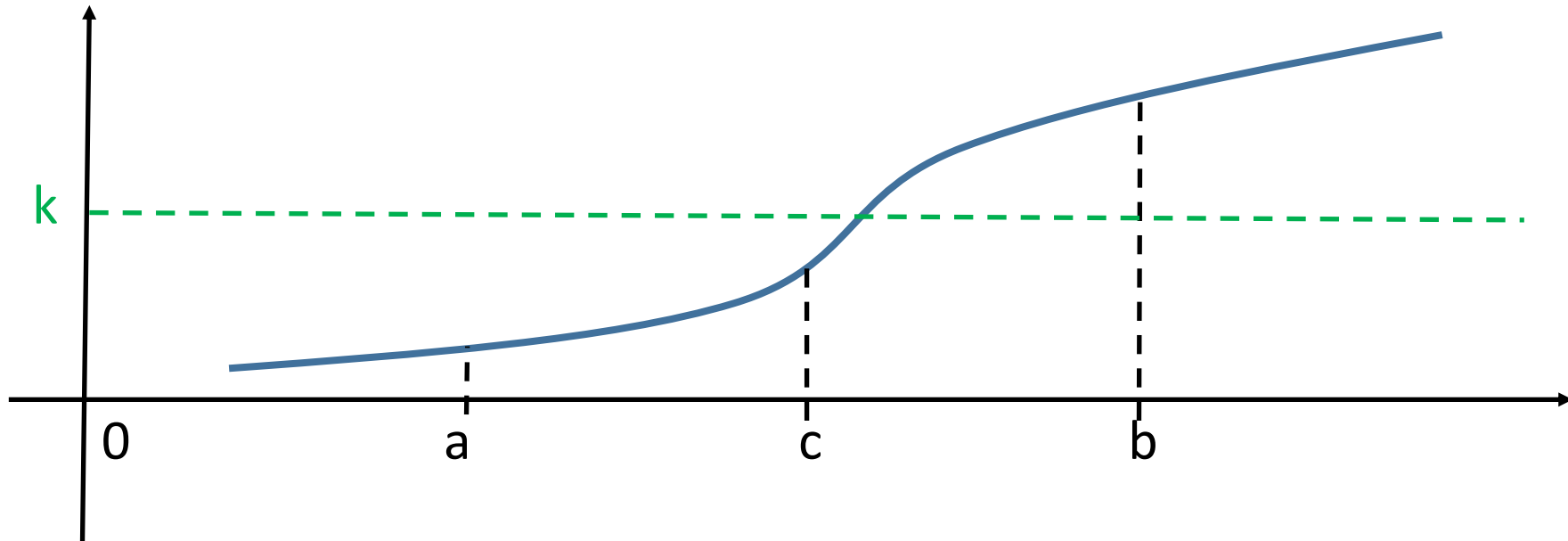
$$c = \frac{a + b}{2}$$



Algorithme de Dichotomie

On va **couper en deux** l'intervalle $[a ; b]$ en déterminant **son milieu c** .

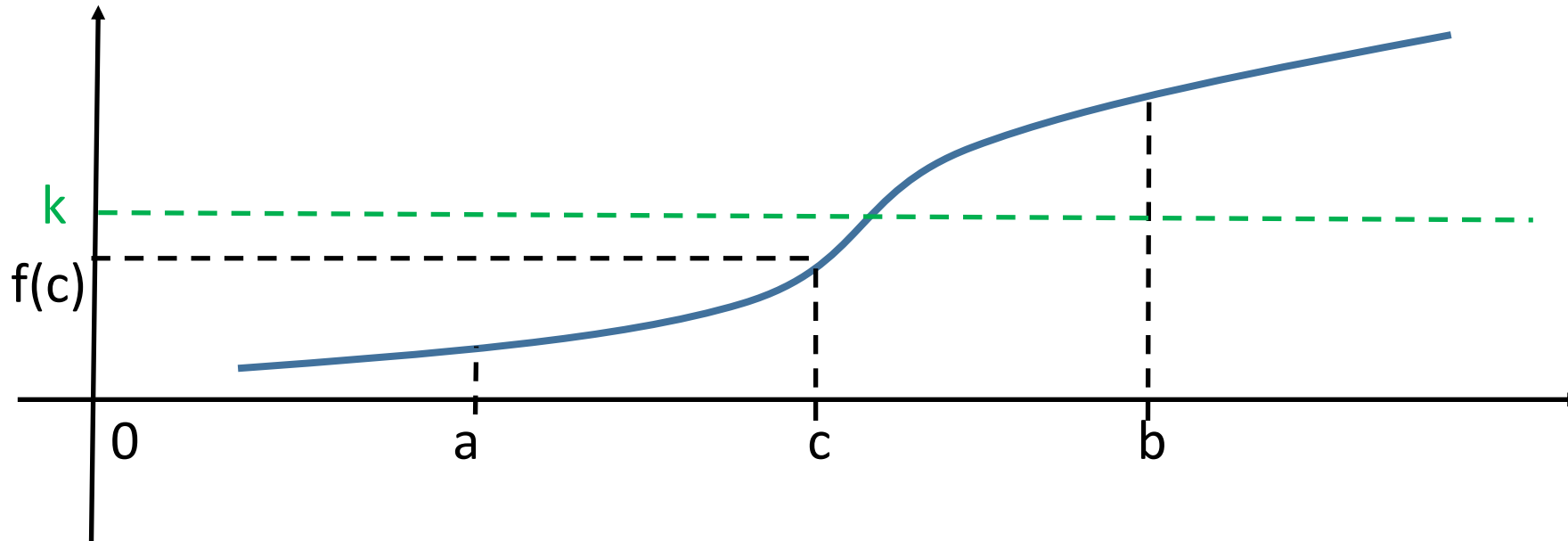
$$c = \frac{a + b}{2} \quad \text{puis en déterminant ...}$$



Algorithme de Dichotomie

On va **couper en deux** l'intervalle $[a ; b]$ en déterminant **son milieu c** .

$c = \frac{a + b}{2}$ puis en déterminant son image $f(c)$

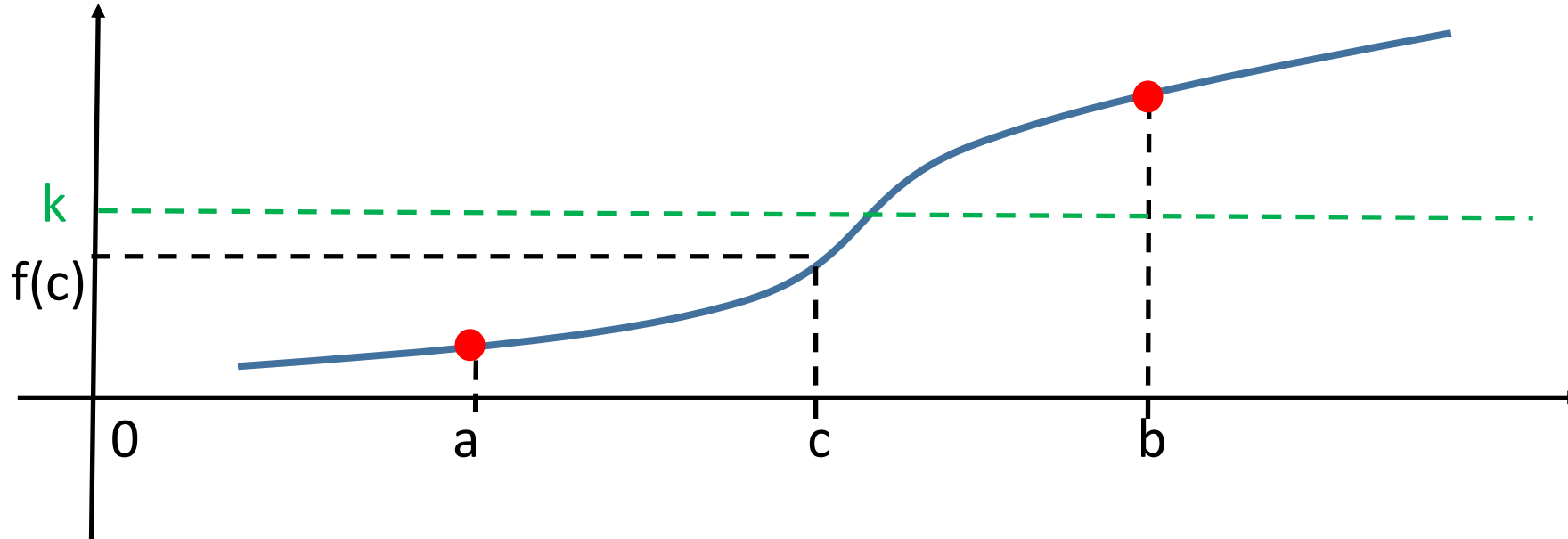


Algorithme de Dichotomie

On va **couper en deux** l'intervalle $[a ; b]$ en déterminant **son milieu c** .

$$c = \frac{a + b}{2} \quad \text{puis en déterminant son image } f(c)$$

On va recommencer l'étape précédente, mais en ...

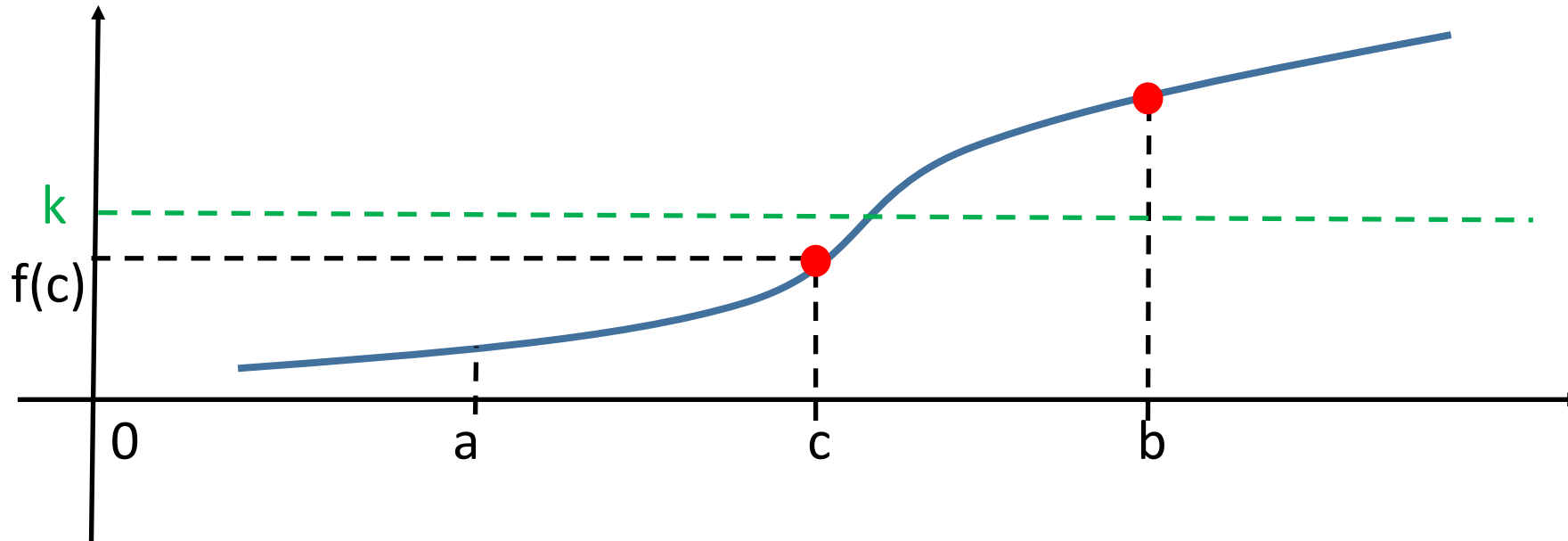


Algorithme de Dichotomie

On va **couper en deux** l'intervalle $[a ; b]$ en déterminant **son milieu c** .

$$c = \frac{a + b}{2} \quad \text{puis en déterminant son image } f(c) = d$$

On va recommencer l'étape précédente, mais en prenant l'intervalle **$[c ; b]$** si ...

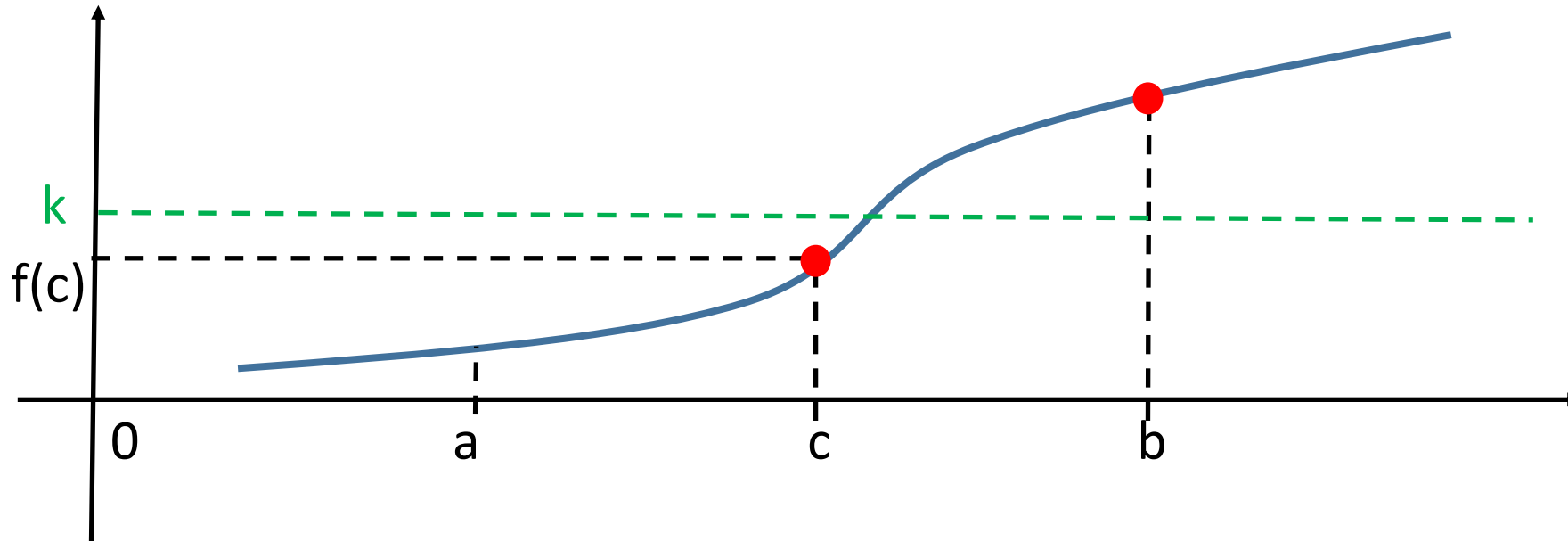


Algorithme de Dichotomie

On va **couper en deux** l'intervalle $[a ; b]$ en déterminant **son milieu c** .

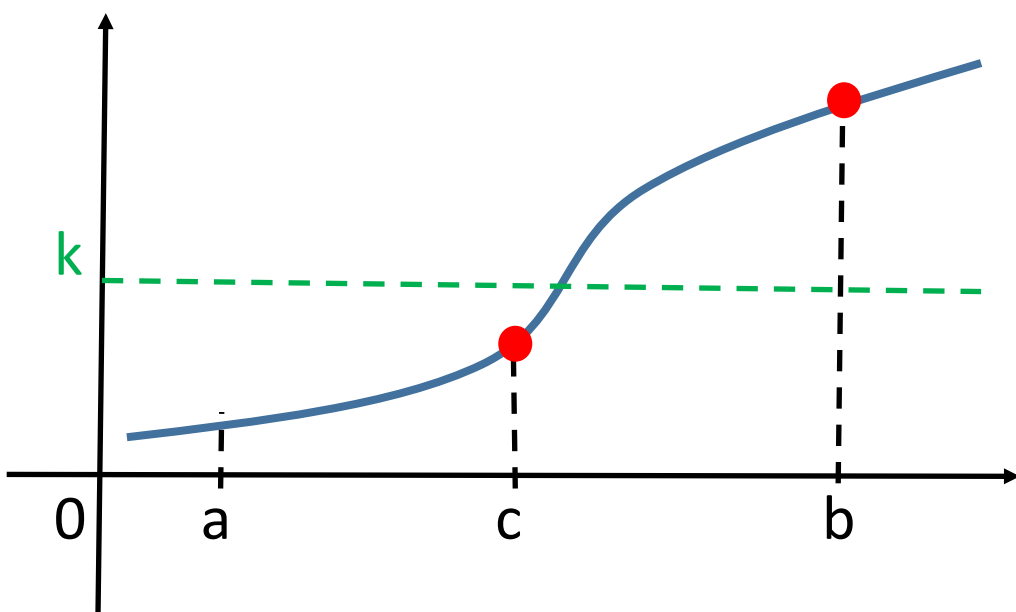
$$c = \frac{a + b}{2} \quad \text{puis en déterminant son image } f(c) = d$$

On va recommencer l'étape précédente, mais en prenant l'intervalle $[c ; b]$ si $f(c) < k$

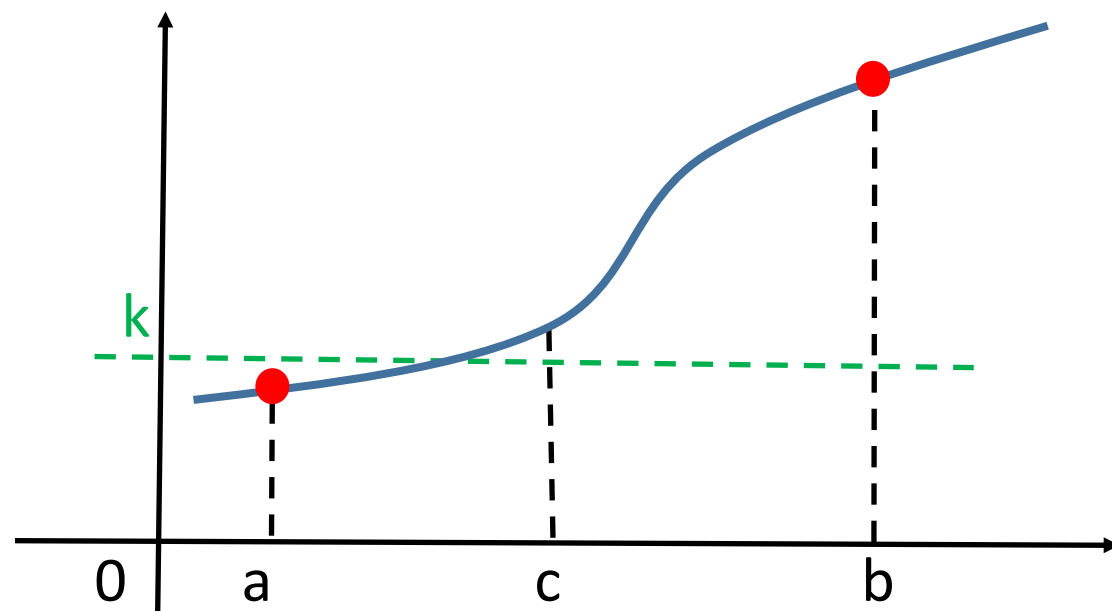


On va recommencer l'étape précédente,

en prenant l'intervalle ... si ...

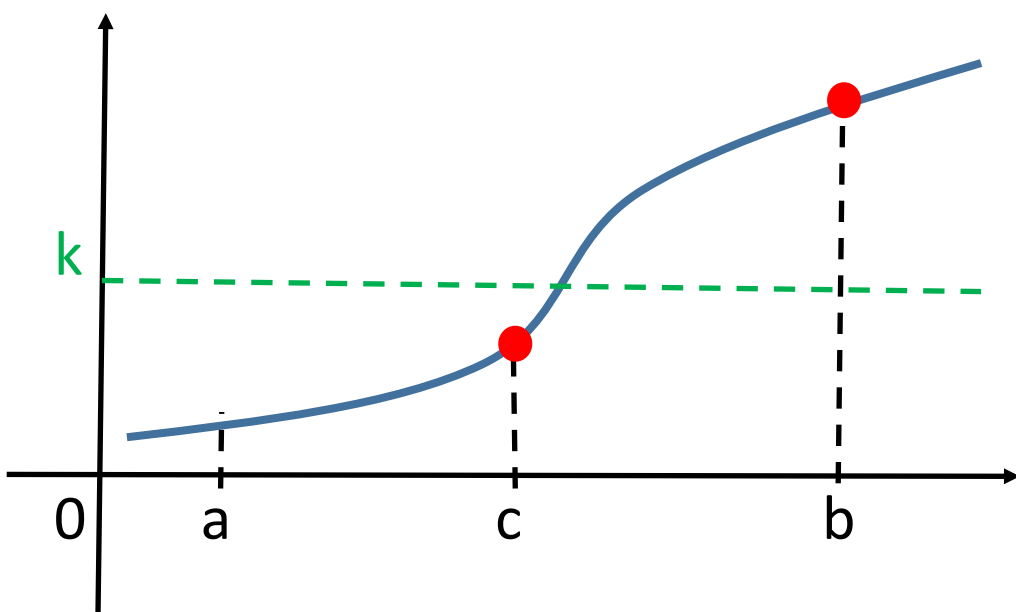


en prenant l'intervalle ... si ...

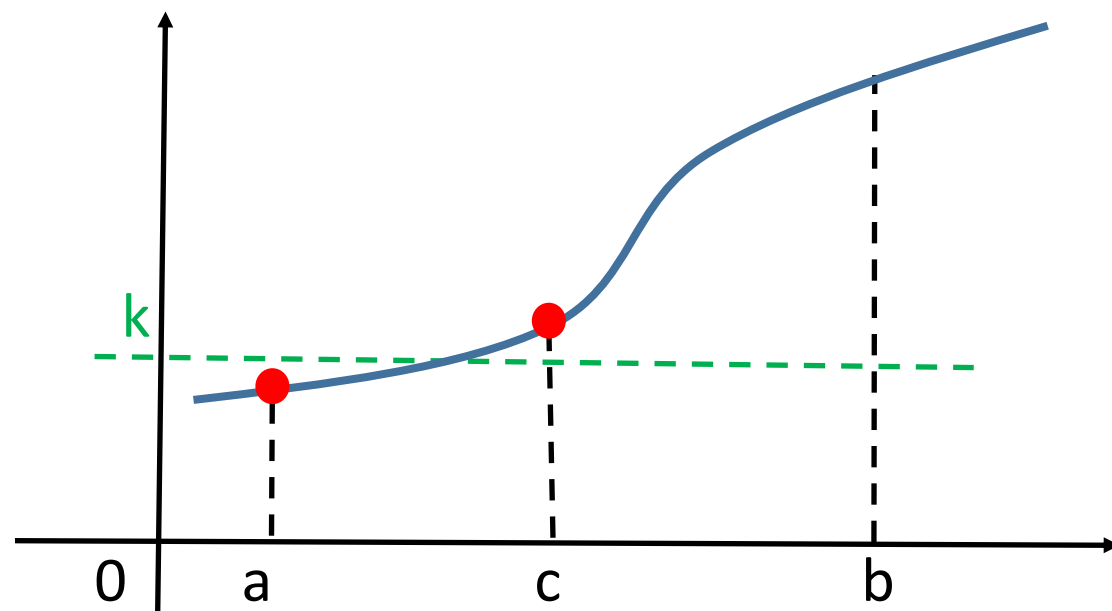


On va recommencer l'étape précédente,

en prenant l'intervalle $[c; b]$ si $f(c) < k$

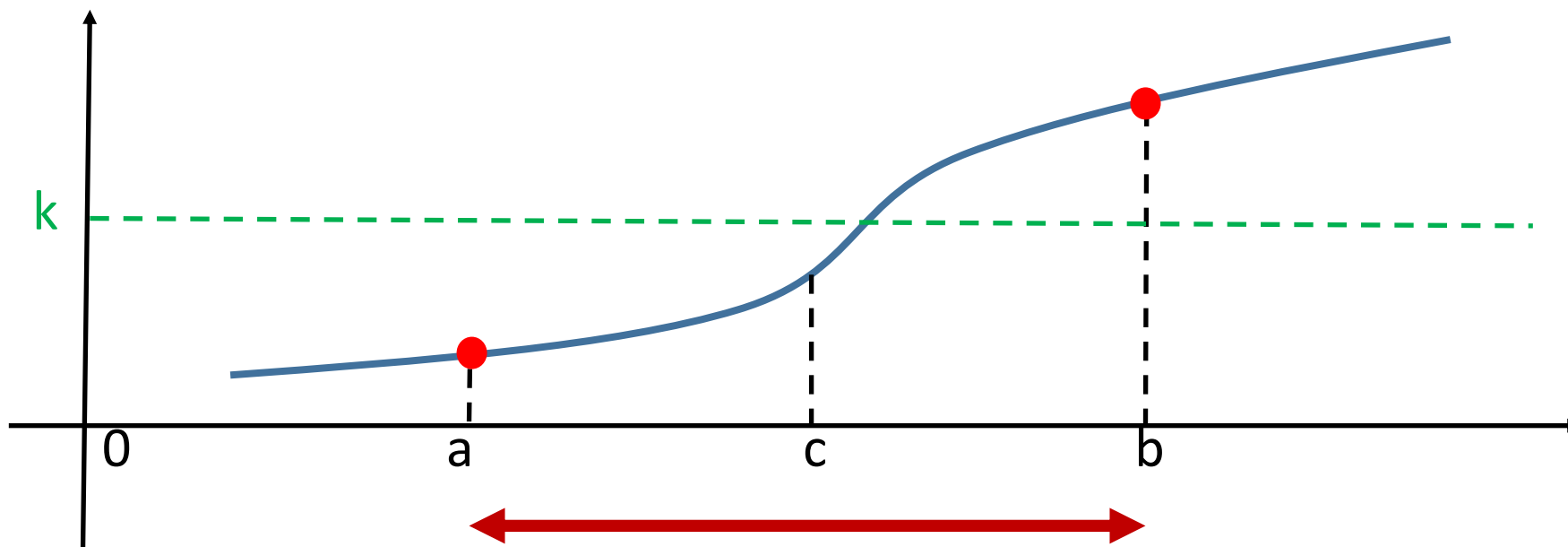


en prenant l'intervalle $[a; c]$ si $f(c) > k$



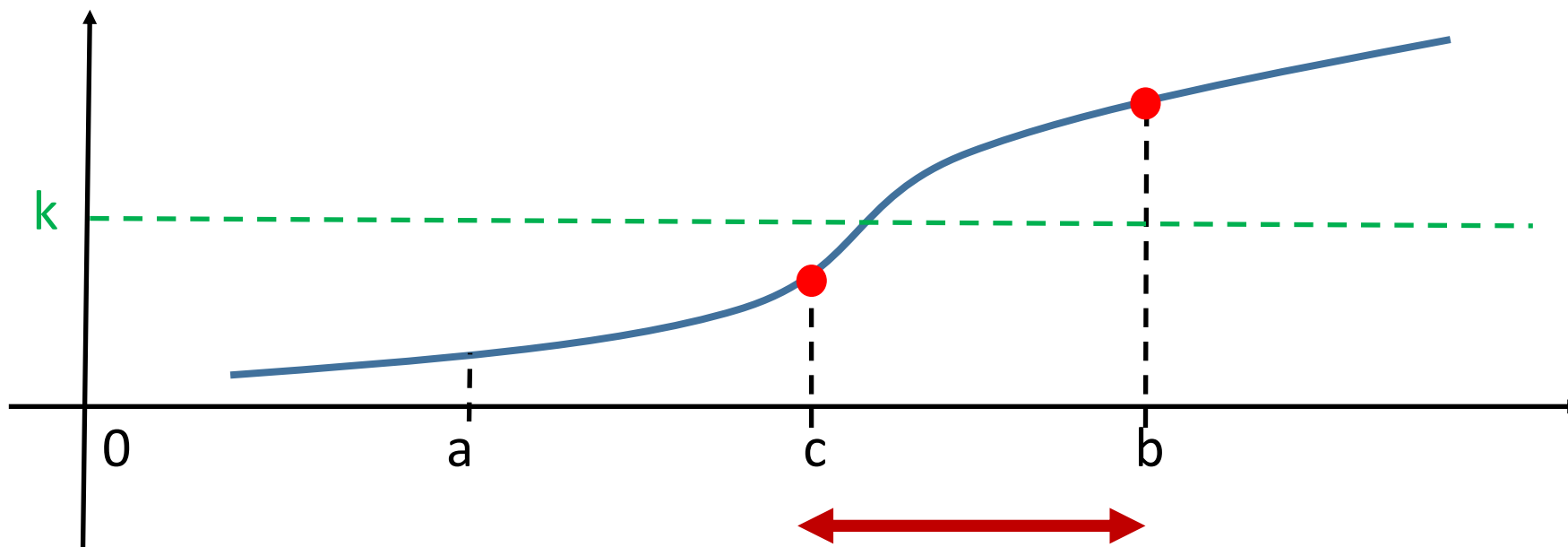
Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va...

...



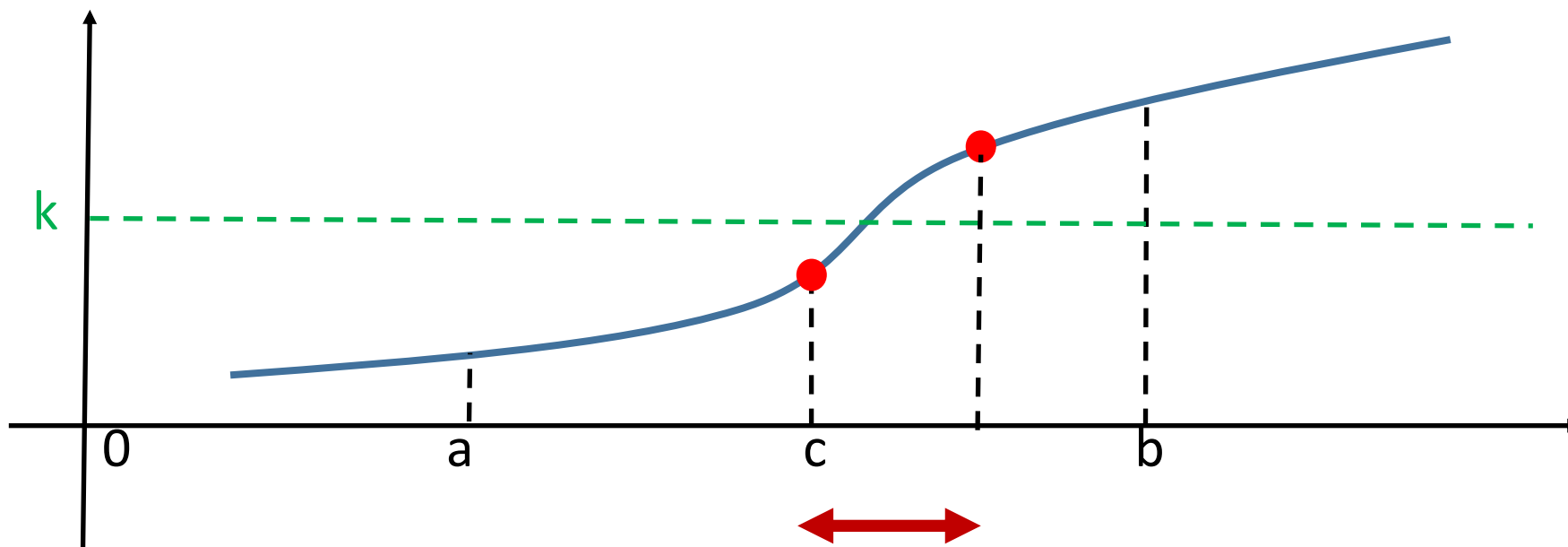
Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va...

...



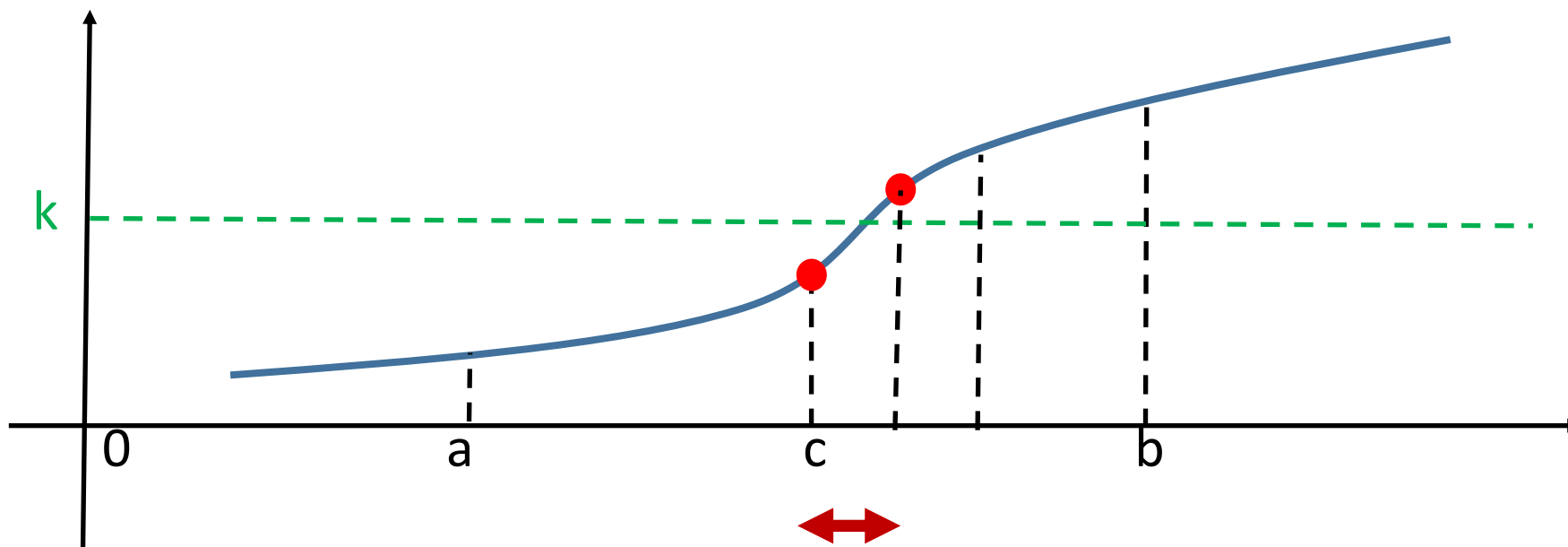
Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va...

...



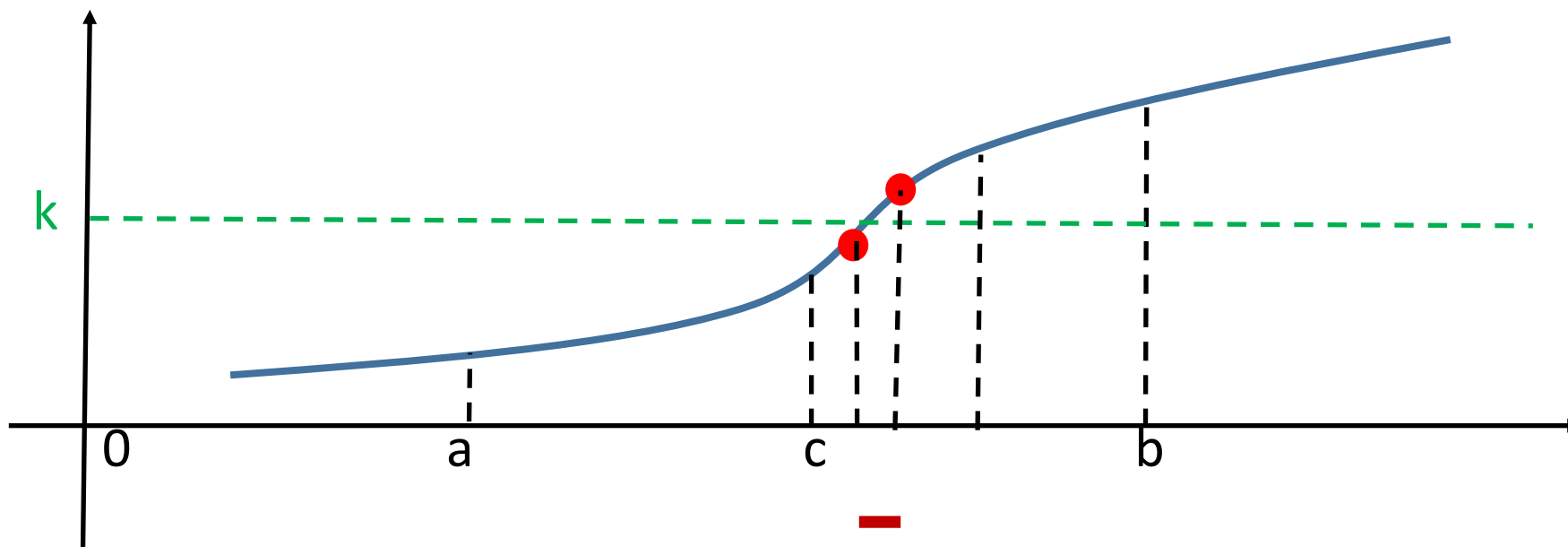
Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va...

...



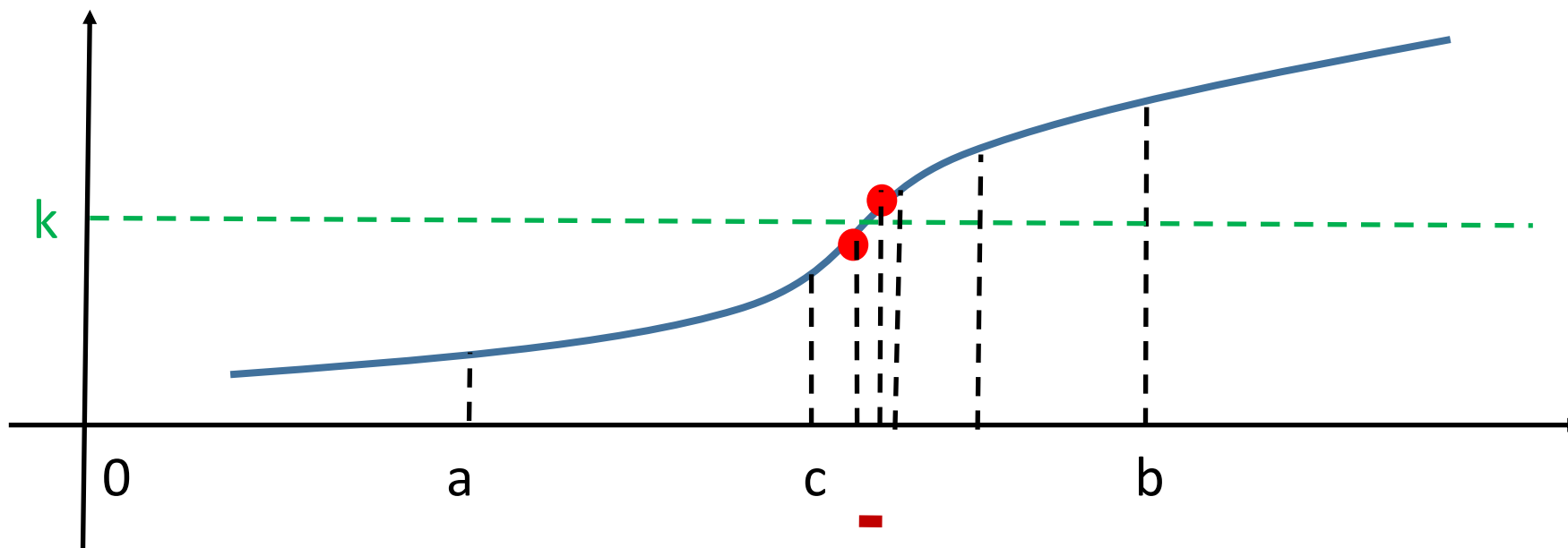
Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va...

...



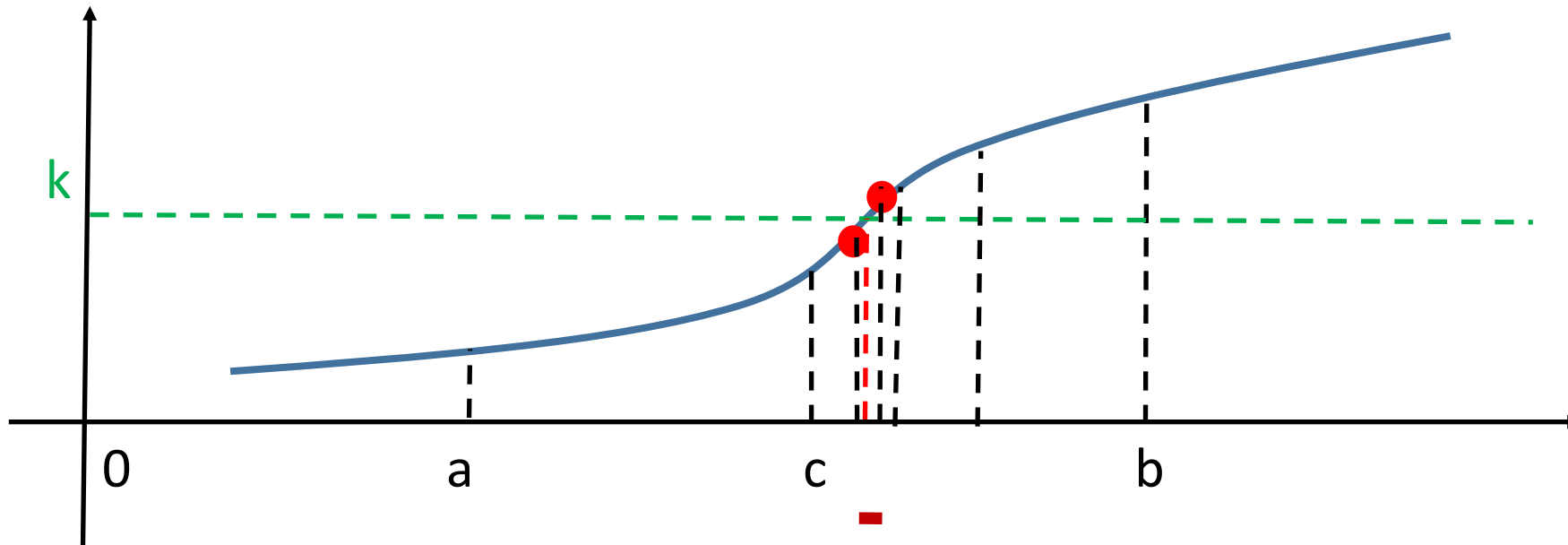
Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va...

diminuer, jusqu'à ce que ...



Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va **diminuer**, jusqu'à ce que l'écart soit plus petit que l'imprécision autorisée.

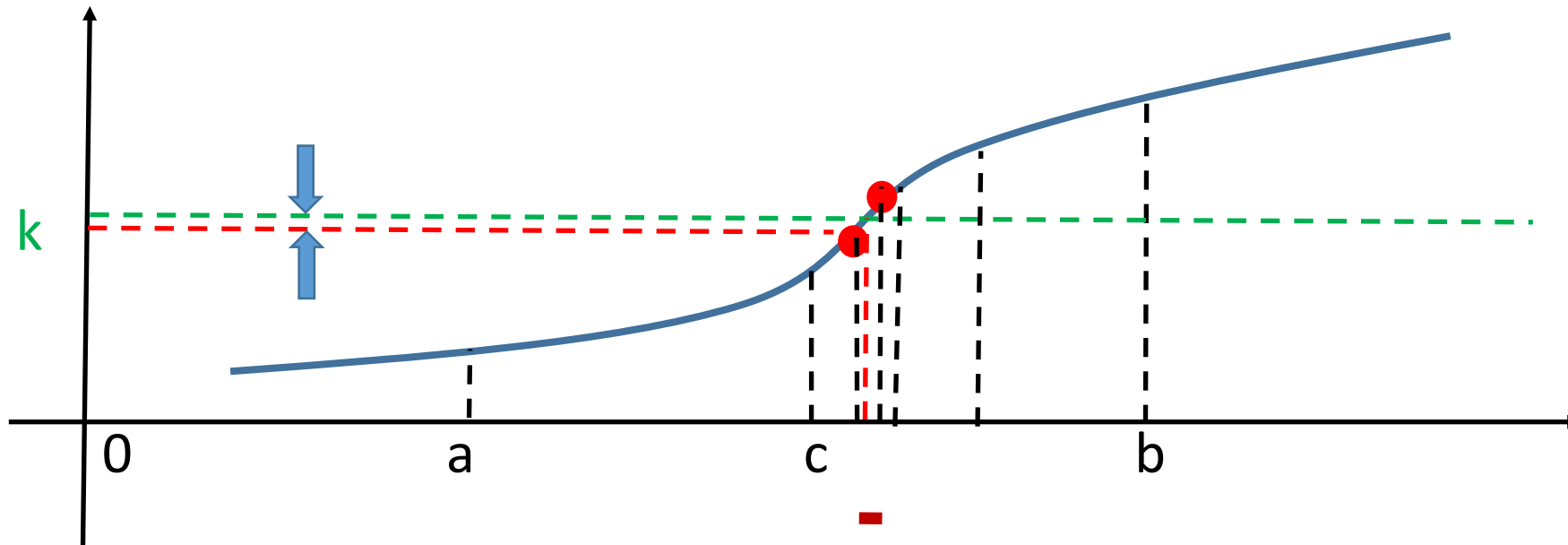
On arrêtera le programme lorsque l'écart sera devenu suffisamment petit entre ...



Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va **diminuer**, jusqu'à ce que l'écart soit plus petit que l'imprécision autorisée.

On arrêtera le programme lorsque l'écart sera devenu suffisamment petit entre les ordonnées $f(c)$ et k (1^{ère} possibilité que l'on choisira).

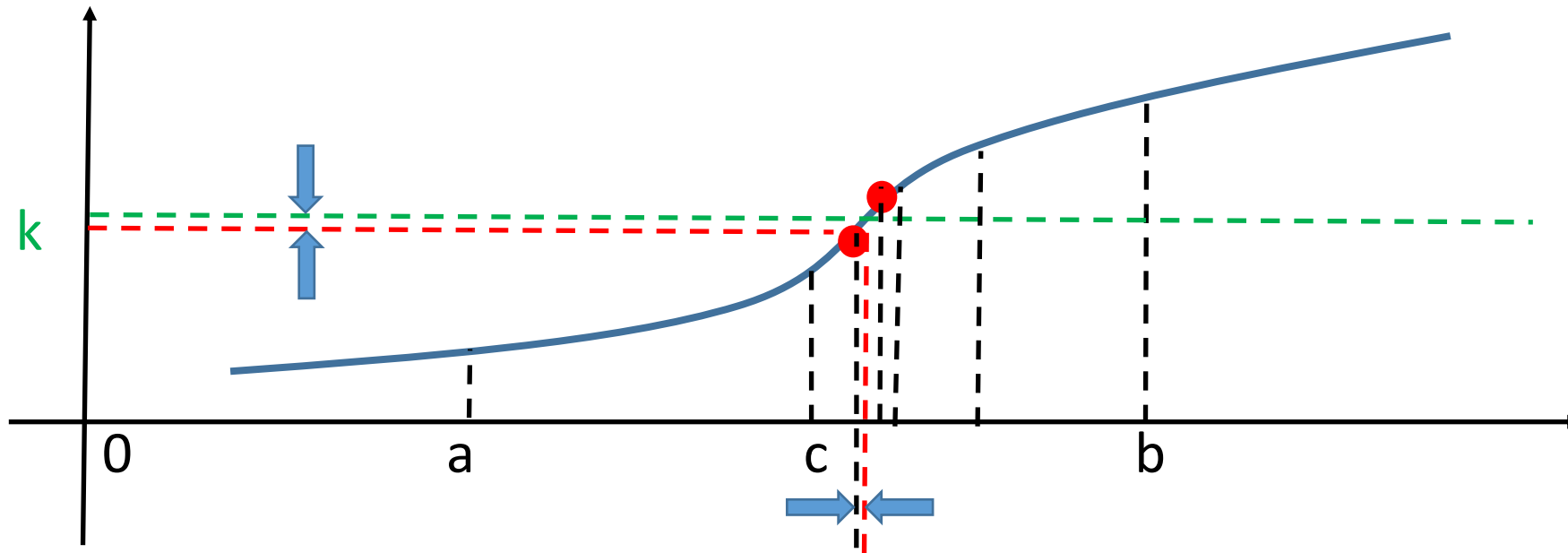
On ne peut pas le faire entre ...



Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va **diminuer**, jusqu'à ce que l'écart soit plus petit que l'imprécision autorisée.

On arrêtera le programme lorsque l'écart sera devenu suffisamment petit entre les ordonnées $f(c)$ et k (1^{ère} possibilité que l'on choisira).

On ne peut pas le faire entre c et la solution x cherchée, car ...

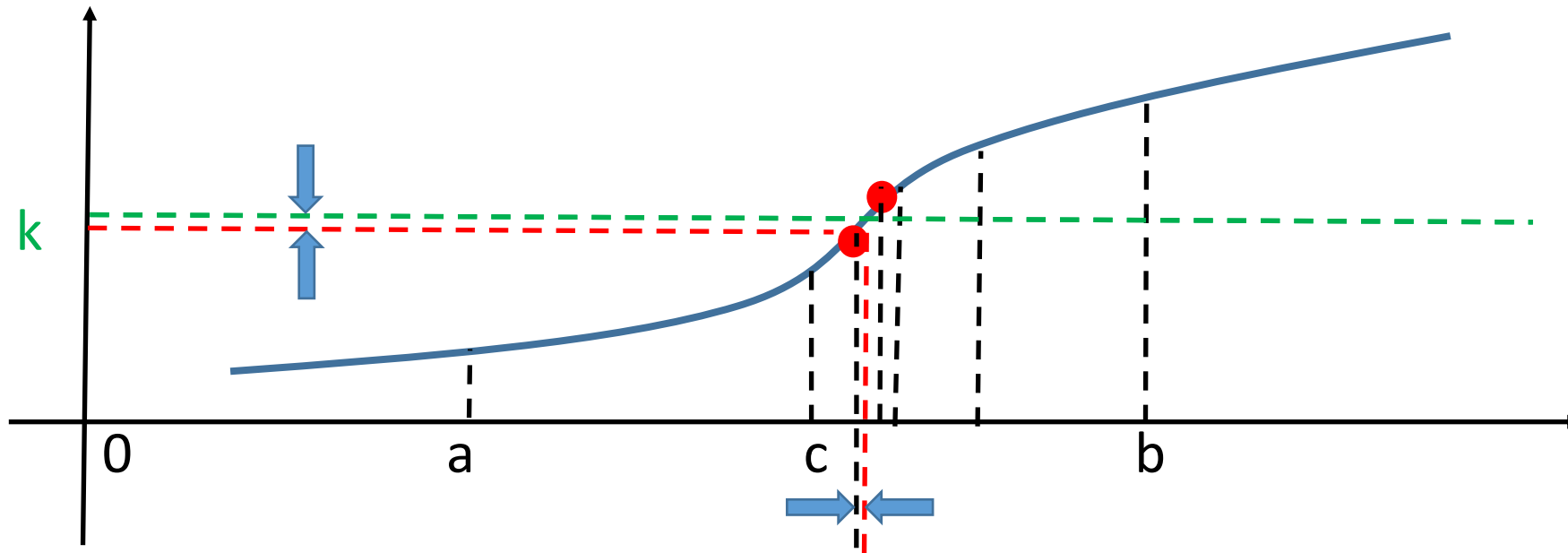


Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va **diminuer**, jusqu'à ce que l'écart soit plus petit que l'imprécision autorisée.

On arrêtera le programme lorsque l'écart sera devenu suffisamment petit entre les ordonnées $f(c)$ et k (1^{ère} possibilité que l'on choisira).

On ne peut pas le faire entre c et la solution x cherchée, car on ne la connaît pas.

On peut arrêter le programme lorsque l'écart sera devenu suffisamment petit entre les abscisses, si on mesure l'écart entre ...

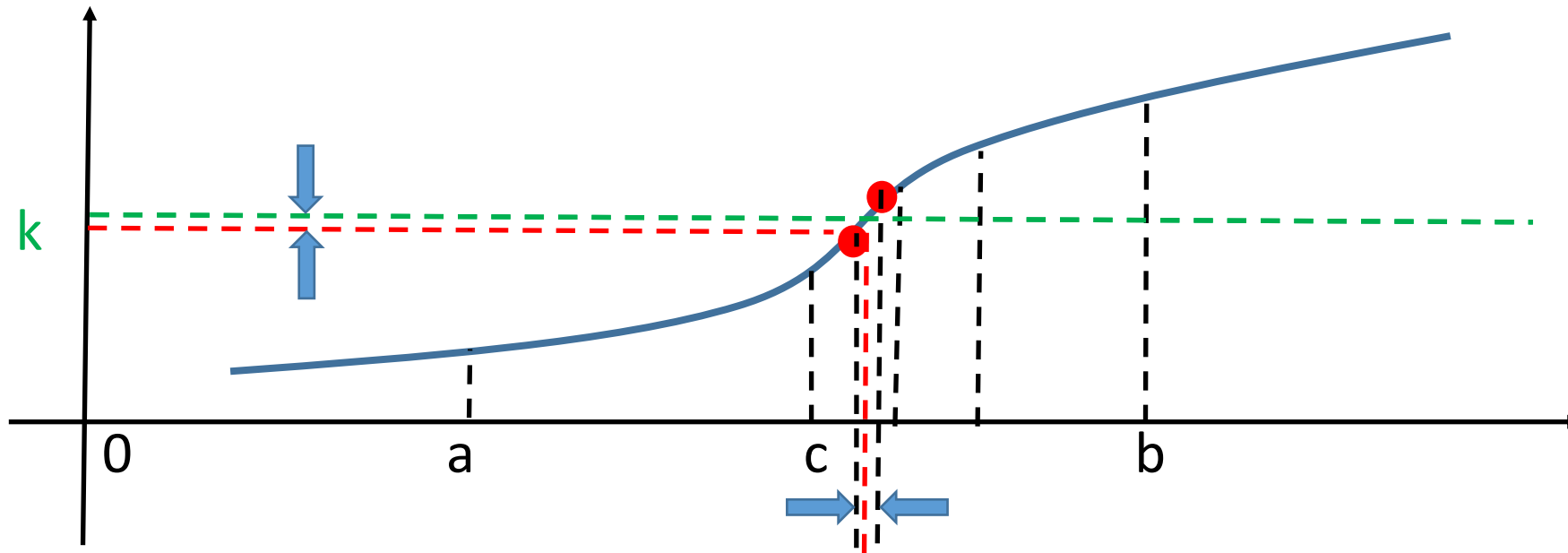


Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va **diminuer**, jusqu'à ce que l'écart soit plus petit que l'imprécision autorisée.

On arrêtera le programme lorsque l'écart sera devenu suffisamment petit entre les ordonnées $f(c)$ et k (1^{ère} possibilité que l'on choisira).

On ne peut pas le faire entre c et la solution x cherchée, car on ne la connaît pas.

On peut arrêter le programme lorsque l'écart sera devenu suffisamment petit entre les abscisses, si on mesure l'écart entre a et b (autre possibilité).



Organigramme :

Données :

On prendra la **fonction carré** (pour une autre fonction, il faudra rentrer dans le programme pour changer l'expression de la fonction).

L'**imprécision** sera de **10^{-5}** sur les **images** (on peut aussi la faire sur les antécédents).

donc il faudra s'arrêter lorsque **$f(c)$** et **k** seront distants de ...

Organigramme :

Données :

On prendra la **fonction carré** (pour une autre fonction, il faudra rentrer dans le programme pour changer l'expression de la fonction).

L'**imprécision** sera de **10^{-5}** sur les **images** (on peut aussi la faire sur les antécédents).

donc il faudra s'arrêter lorsque **$f(c)$** et **k** seront distants de moins de **10^{-5}**

donc $f(c) - k \leq 10^{-5} \quad ?$

Organigramme :

Données :

On prendra la **fonction carré** (pour une autre fonction, il faudra rentrer dans le programme pour changer l'expression de la fonction).

L'**imprécision** sera de **10^{-5}** sur les **images** (on peut aussi la faire sur les antécédents).

donc il faudra s'arrêter lorsque **$f(c)$** et **k** seront distants de moins de **10^{-5}**

$$\text{donc} \quad -10^{-5} \leq f(c) - k \leq 10^{-5}$$

Organigramme :

Données :

On prendra la **fonction carré** (pour une autre fonction, il faudra rentrer dans le programme pour changer l'expression de la fonction).

L'**imprécision** sera de **10^{-5}** sur les **images** (on peut aussi la faire sur les antécédents).

donc il faudra s'arrêter lorsque **$f(c)$** et **k** seront distants de moins de **10^{-5}**

et **$f(c)$** peut être **sup.** ou **inf.** à **k** , donc utiliser la valeur absolue **$| f(c) - k | \leq 10^{-5}$**

Organigramme :

Données :

On prendra la **fonction carré** (pour une autre fonction, il faudra rentrer dans le programme pour changer l'expression de la fonction).

L'**imprécision** sera de **10^{-5}** sur les **images** (on peut aussi la faire sur les antécédents).

donc il faudra s'arrêter lorsque **$f(c)$** et **k** seront distants de moins de **10^{-5}**
et **$f(c)$** peut être **sup.** ou **inf.** à **k** , donc utiliser la valeur absolue **$| f(c) - k | \leq 10^{-5}$**

On veut que l'algorithme permette de donner une solution approchée de l'équation **$f(x) = k$** sur l'intervalle **$[a ; b]$** ,

pour tout réel **k** sur tout intervalle **$[a ; b]$** où la fonction est monotone,
donc **saisir** à chaque utilisation les valeurs de ...

Organigramme :

Données :

On prendra la **fonction carré** (pour une autre fonction, il faudra rentrer dans le programme pour changer l'expression de la fonction).

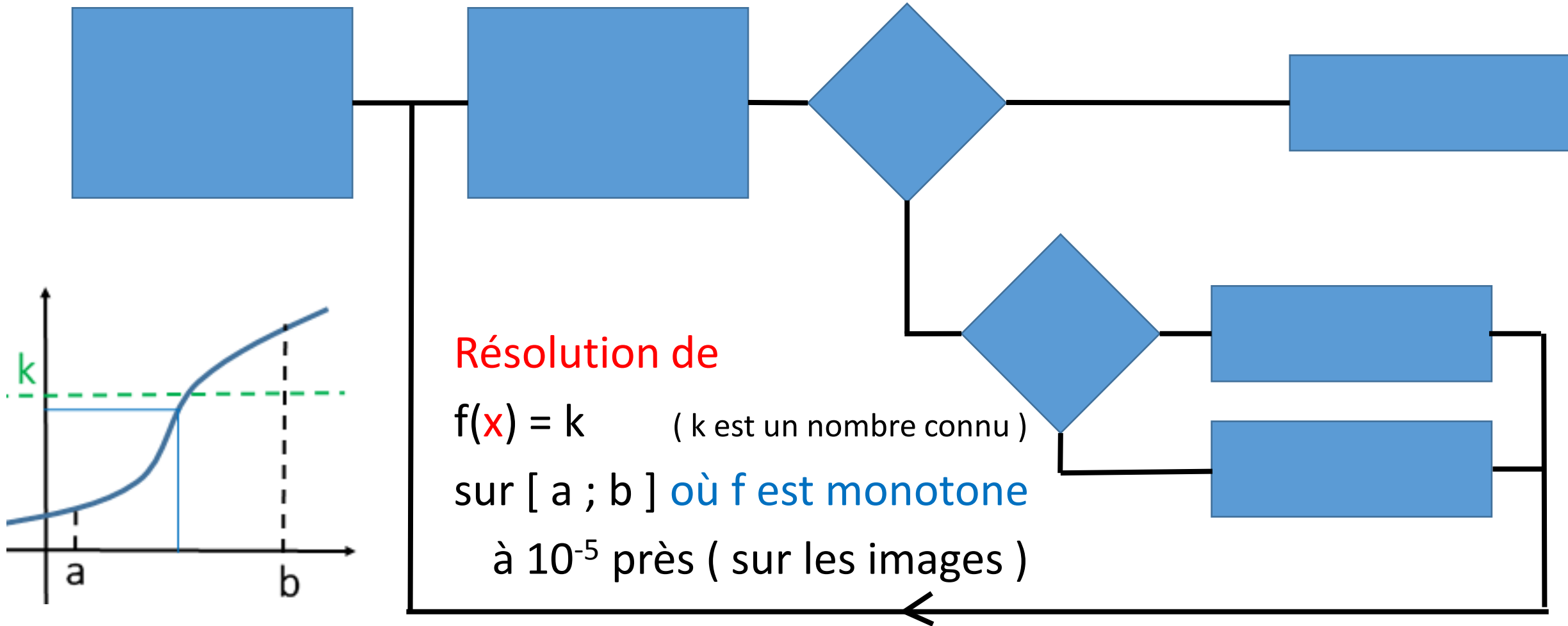
L'**imprécision** sera de **10^{-5}** sur les **images** (on peut aussi la faire sur les antécédents).

donc il faudra s'arrêter lorsque **$f(c)$** et **k** seront distants de moins de **10^{-5}**
et **$f(c)$** peut être **sup.** ou **inf.** à **k** , donc utiliser la valeur absolue **$| f(c) - k | \leq 10^{-5}$**

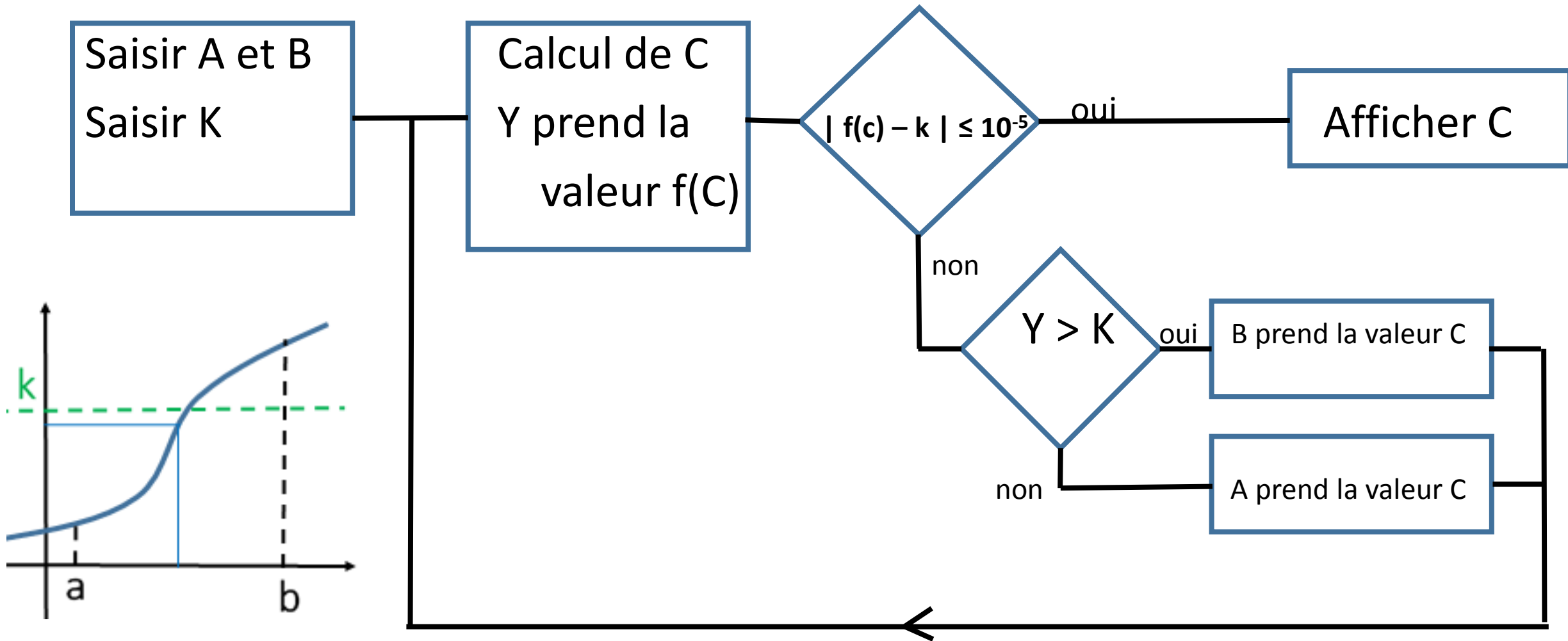
On veut que l'algorithme permette de donner une solution approchée de l'équation **$f(x) = k$** sur l'intervalle **$[a ; b]$** ,

pour tout réel **k** sur tout intervalle **$[a ; b]$** où la fonction est monotone,
donc **saisir** à chaque utilisation les valeurs de **a** , **b** et **k** .

Organigramme de **dichotomie** :

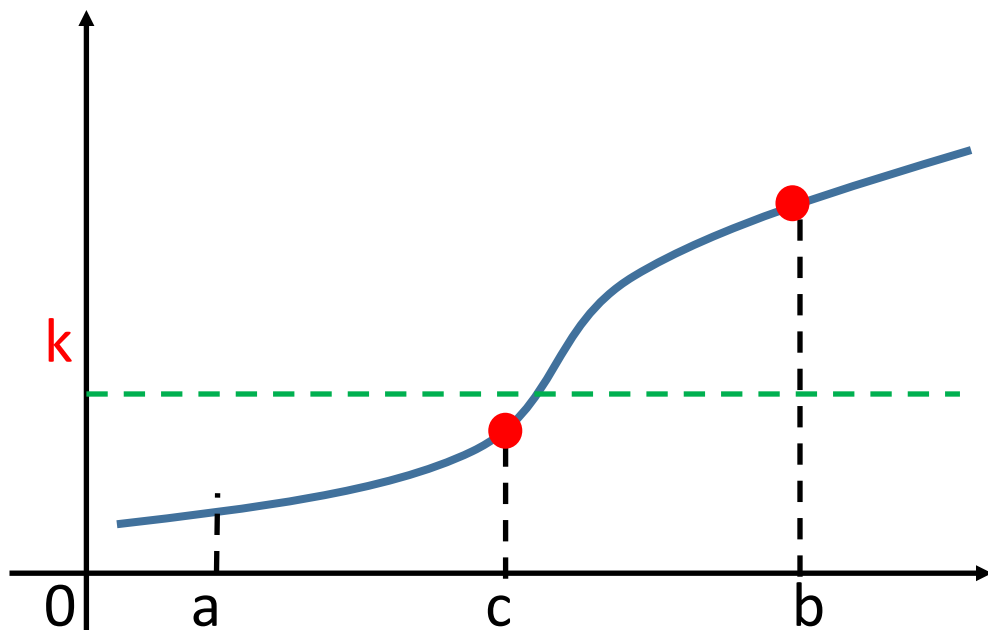


Organigramme :

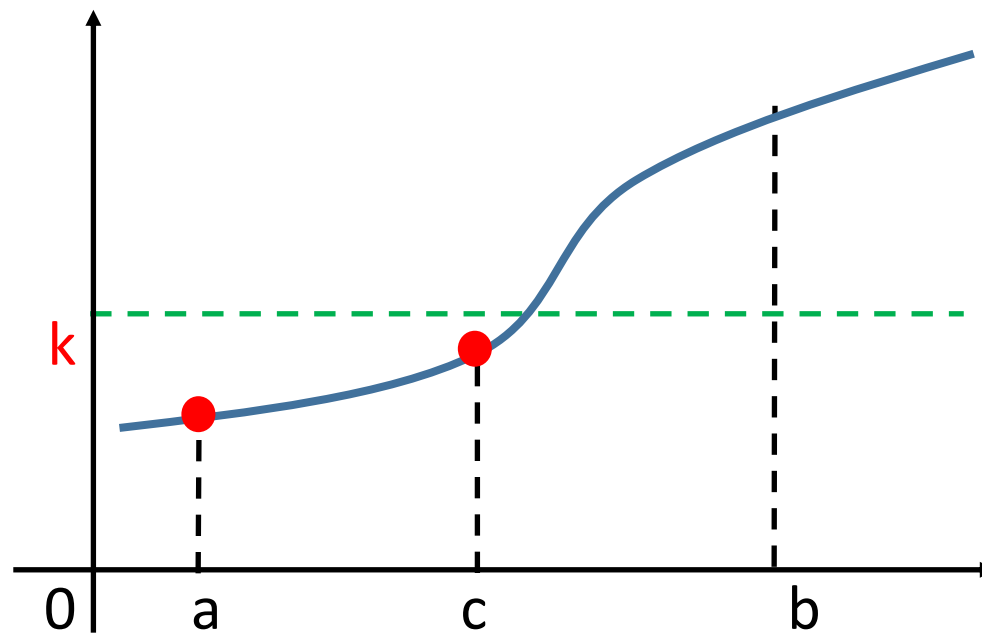


Cet organigramme convient-il à **tous les cas** ?

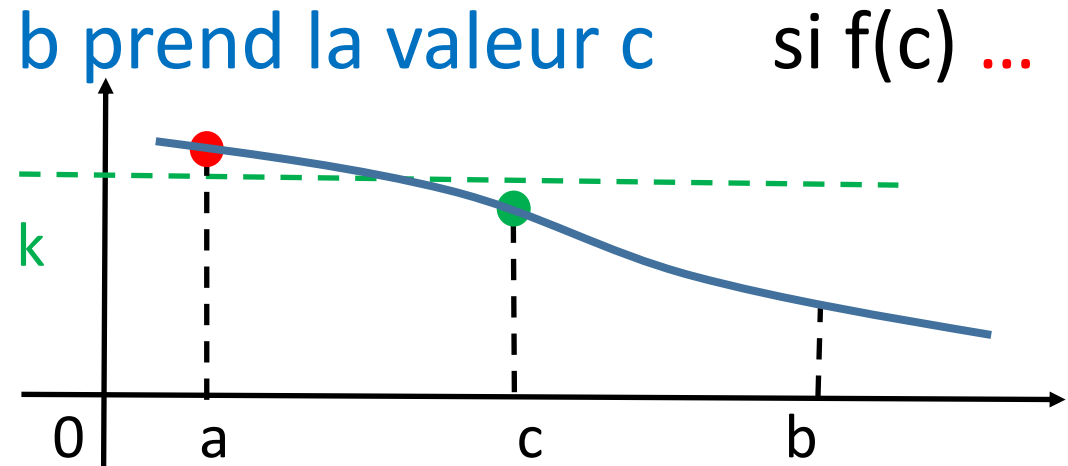
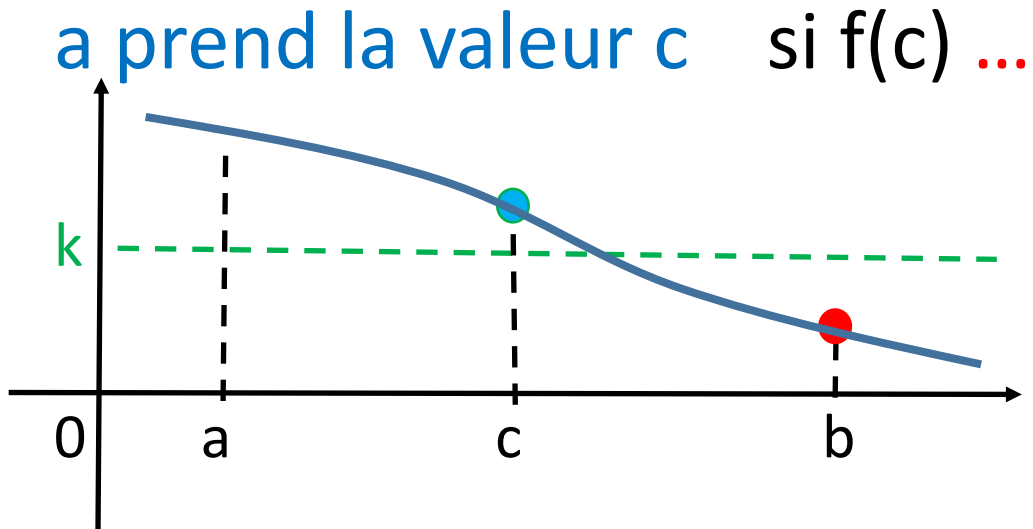
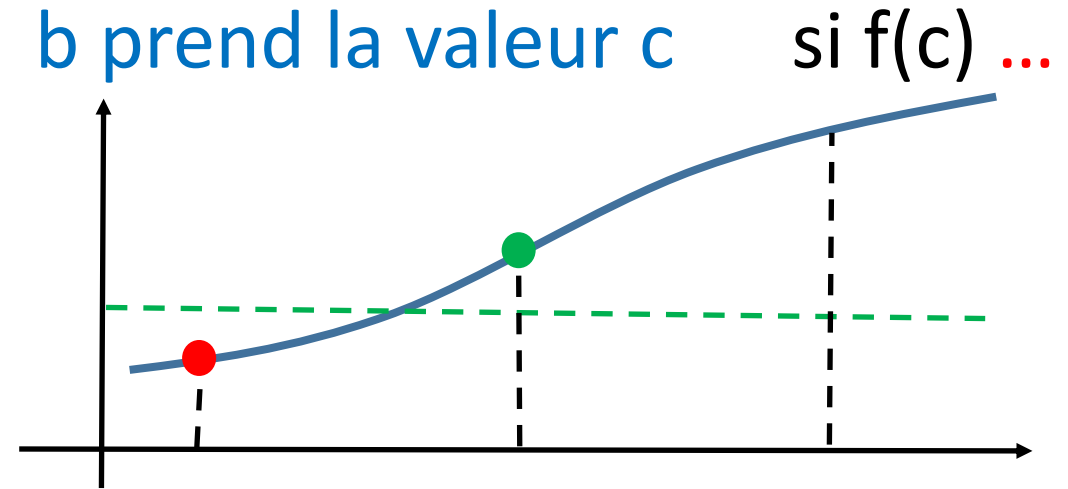
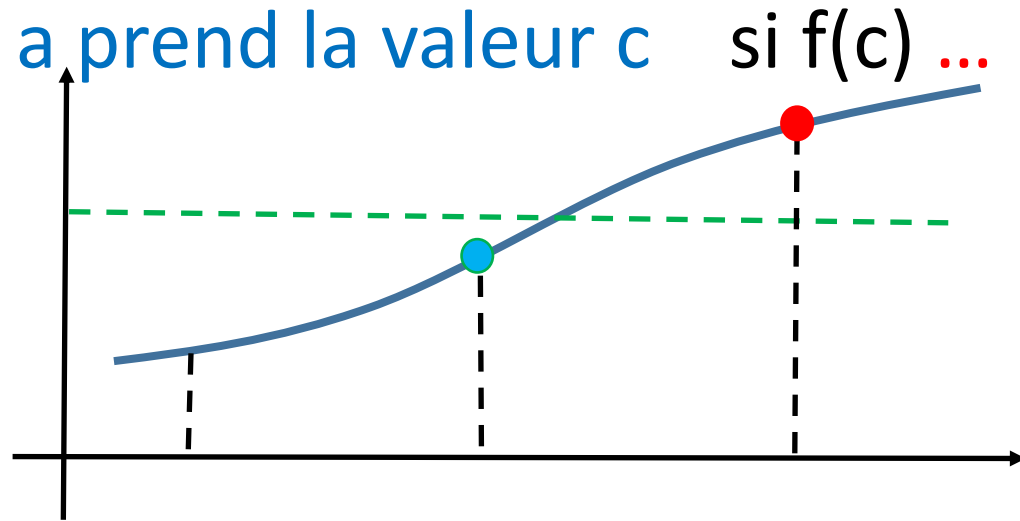
a prend la valeur c si $f(c) < k$



b prend la valeur c si $f(c) > k$

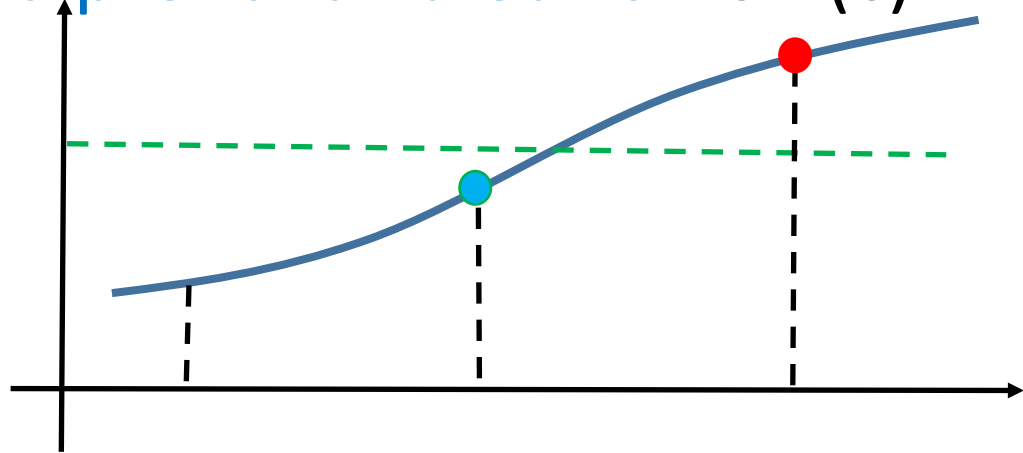


Convient-il pour les cas où la fonction est **décroissante** ?

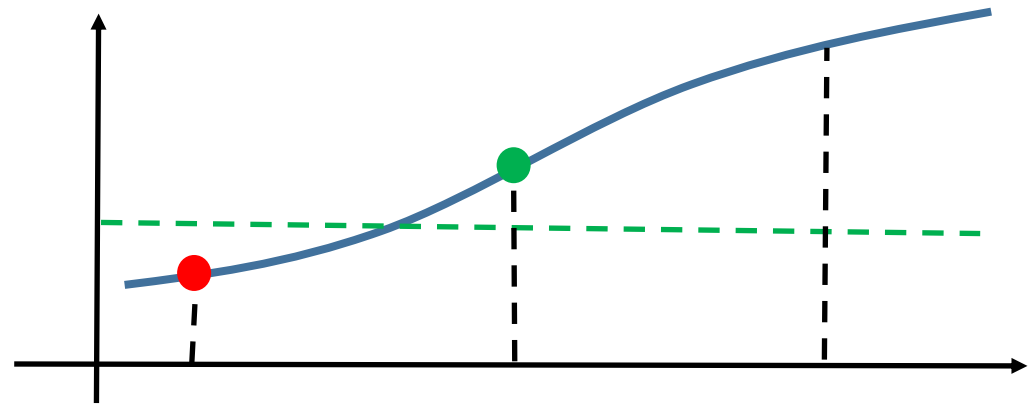


Convient-il pour les cas où la fonction est **décroissante** ?

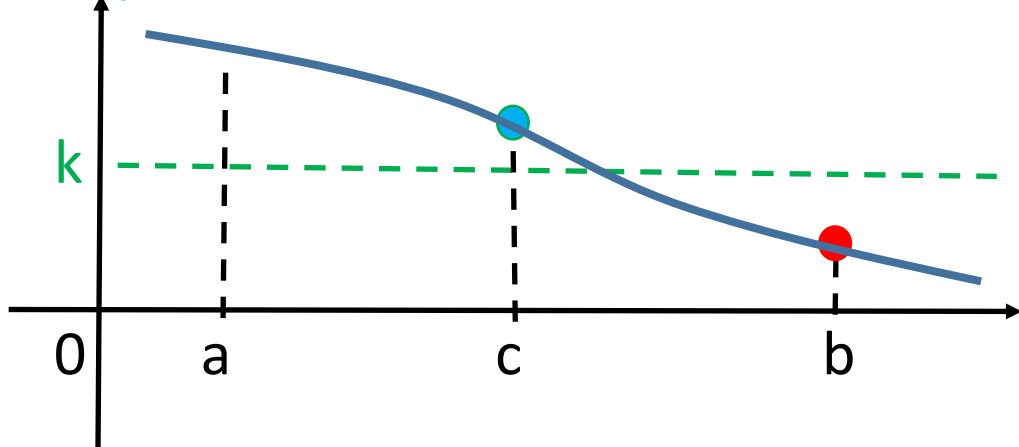
a prend la valeur c si $f(c) < k$



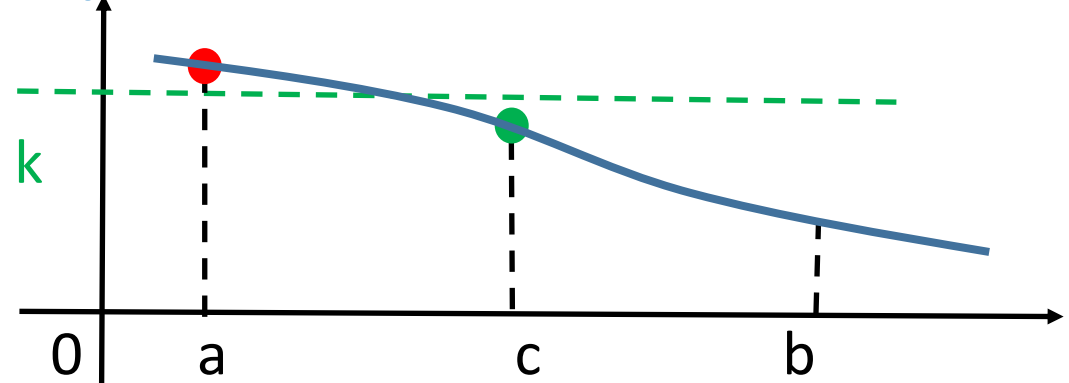
b prend la valeur c si $f(c) > k$



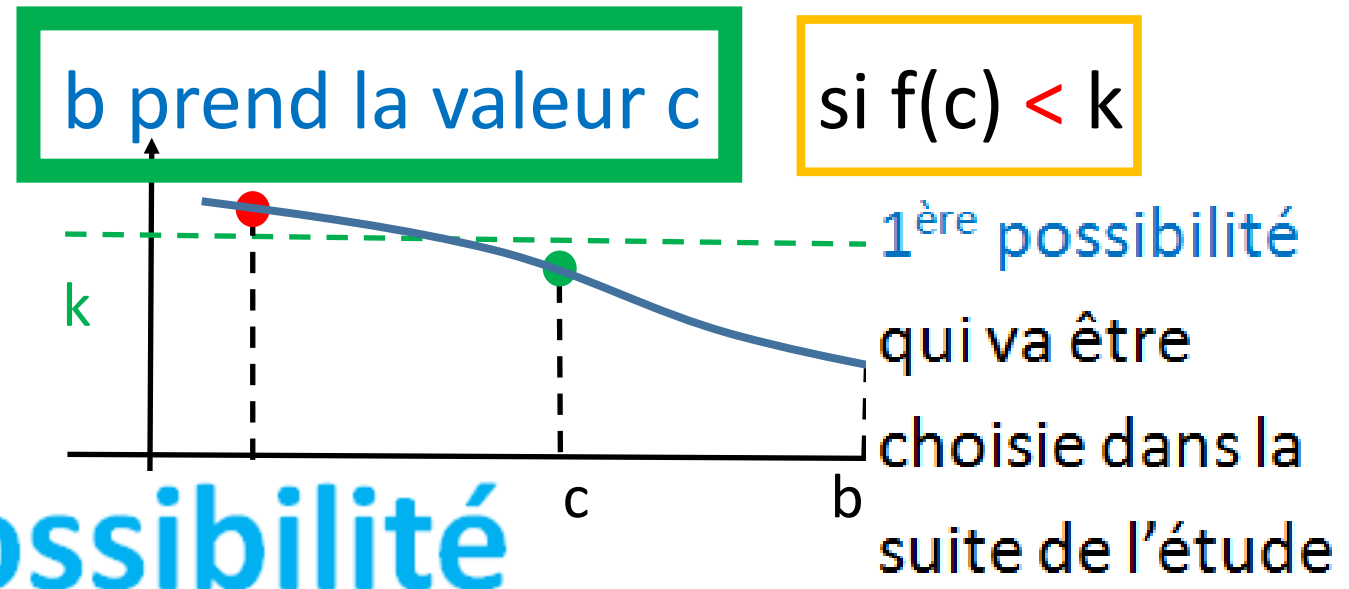
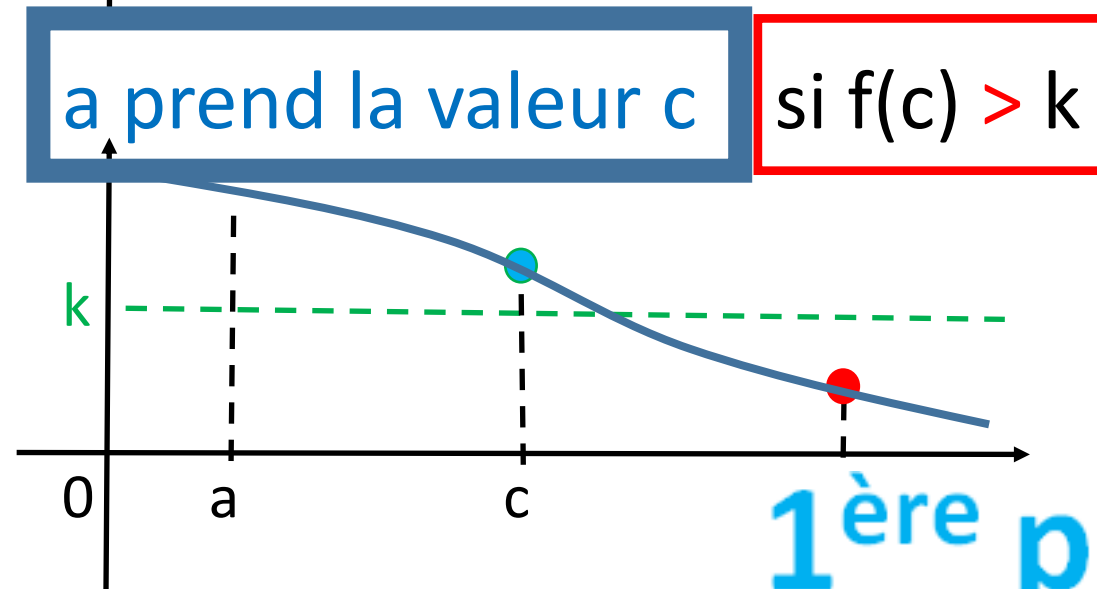
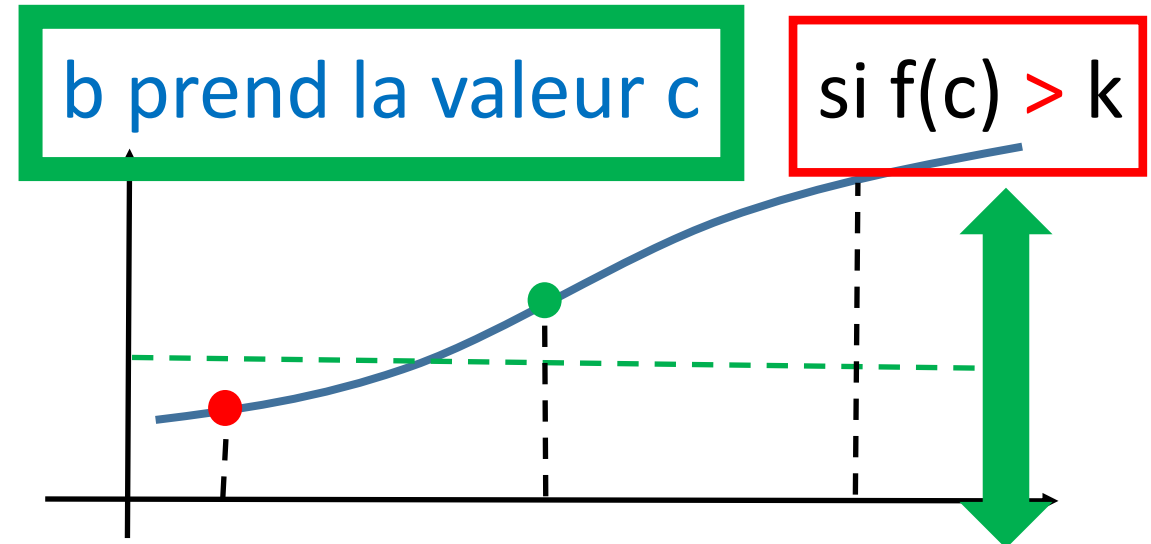
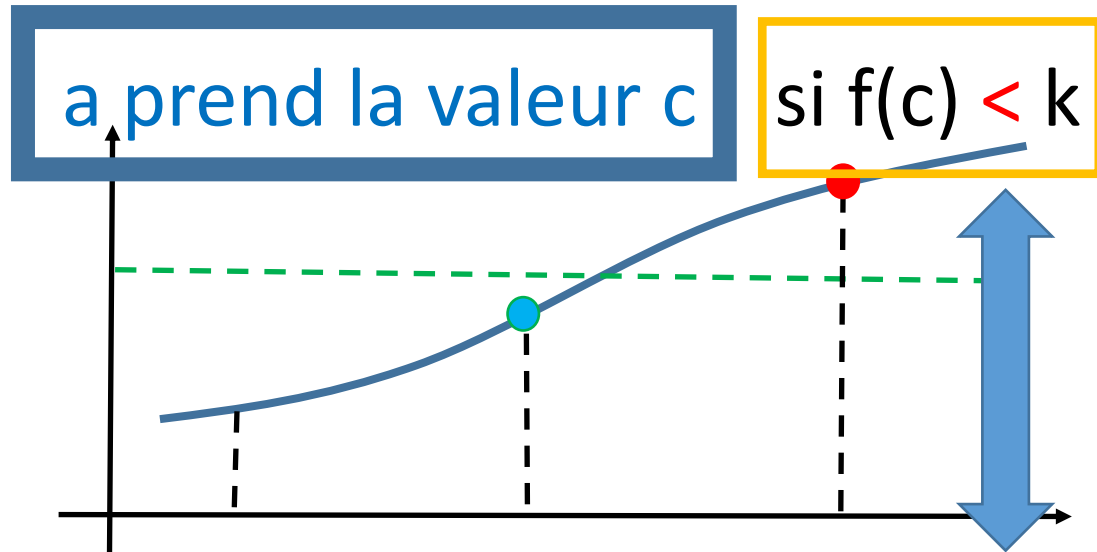
a prend la valeur c si $f(c) > k$



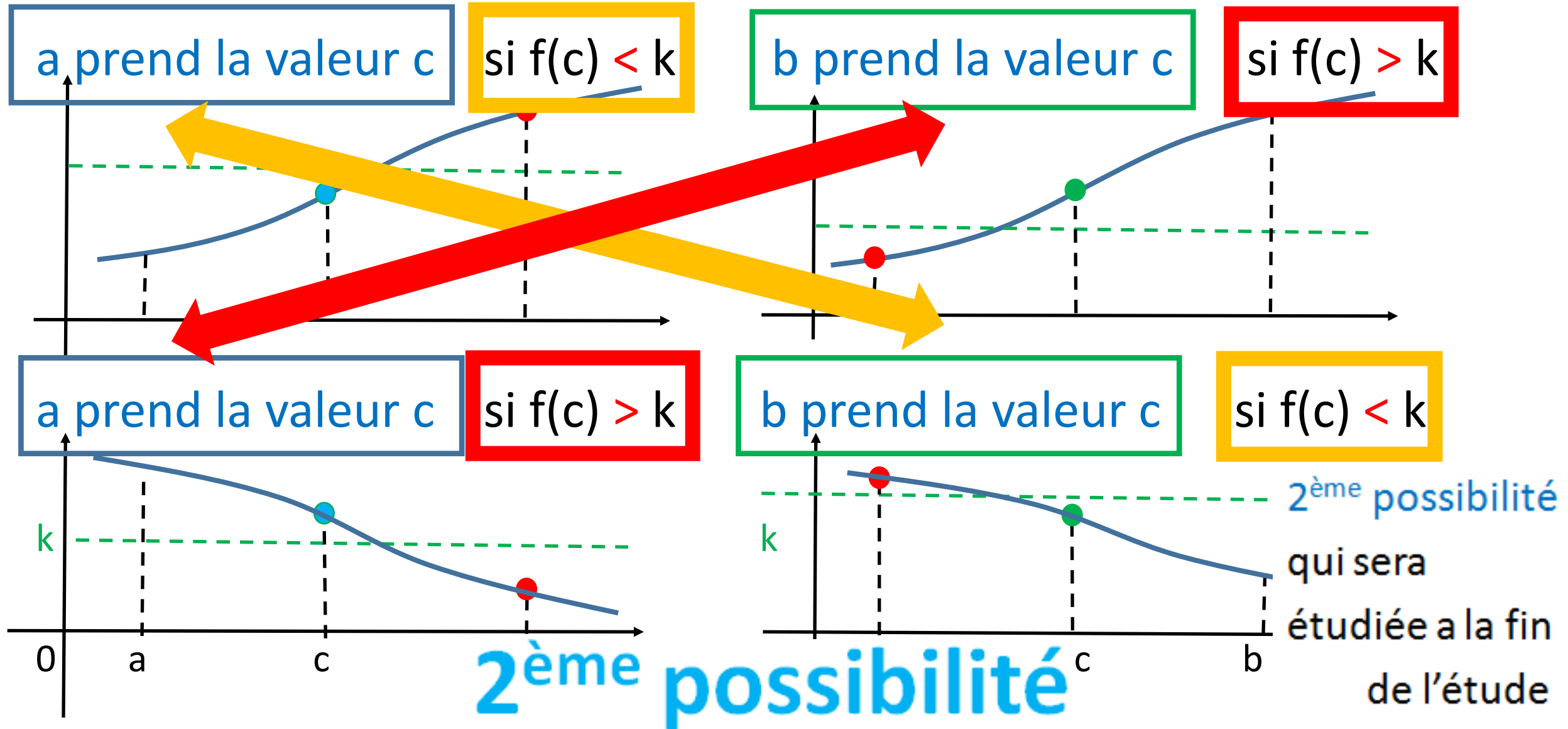
b prend la valeur c si $f(c) < k$



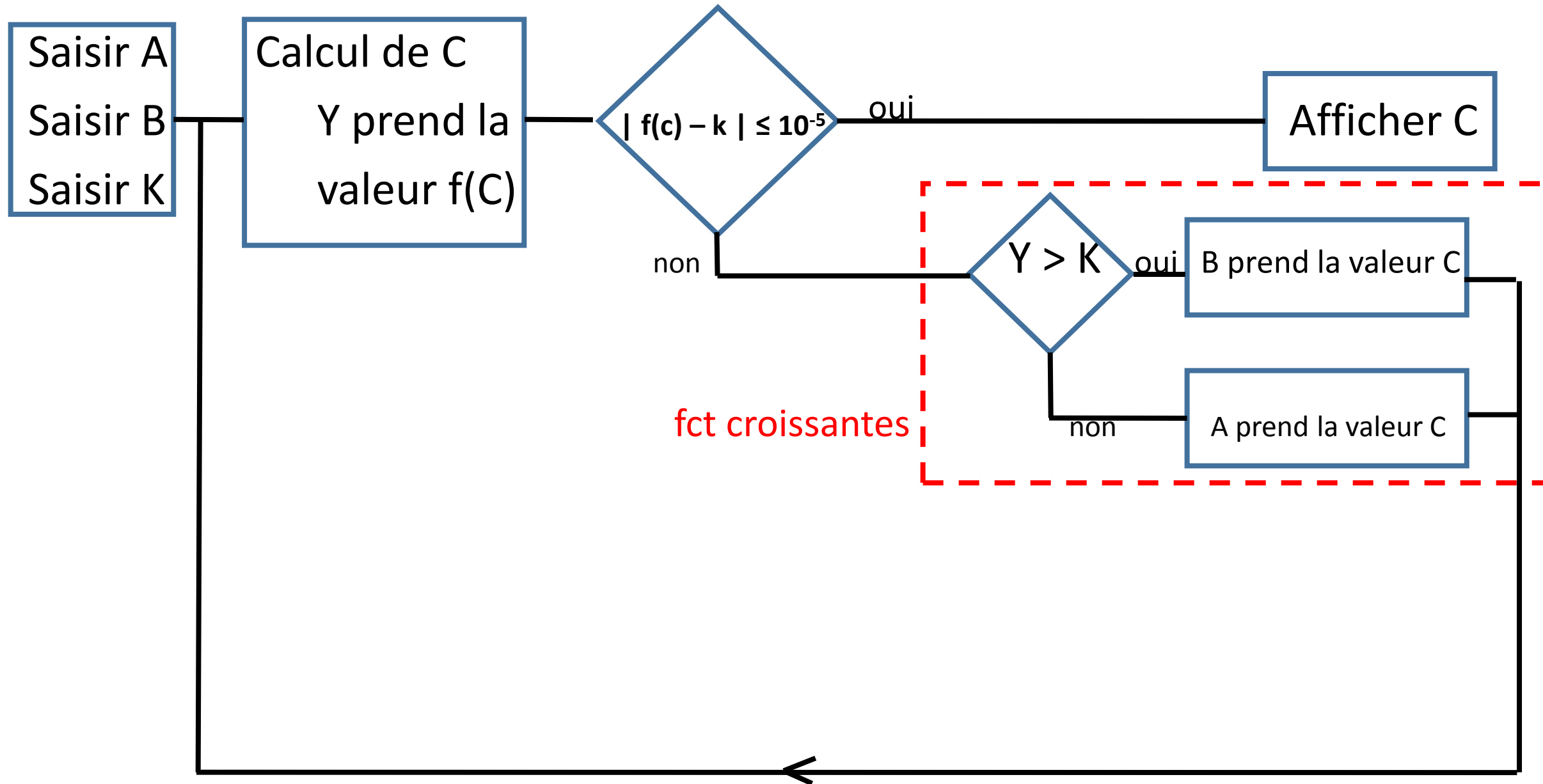
Conclusion : conditions contraires pour les mêmes actions
ou : ... ?



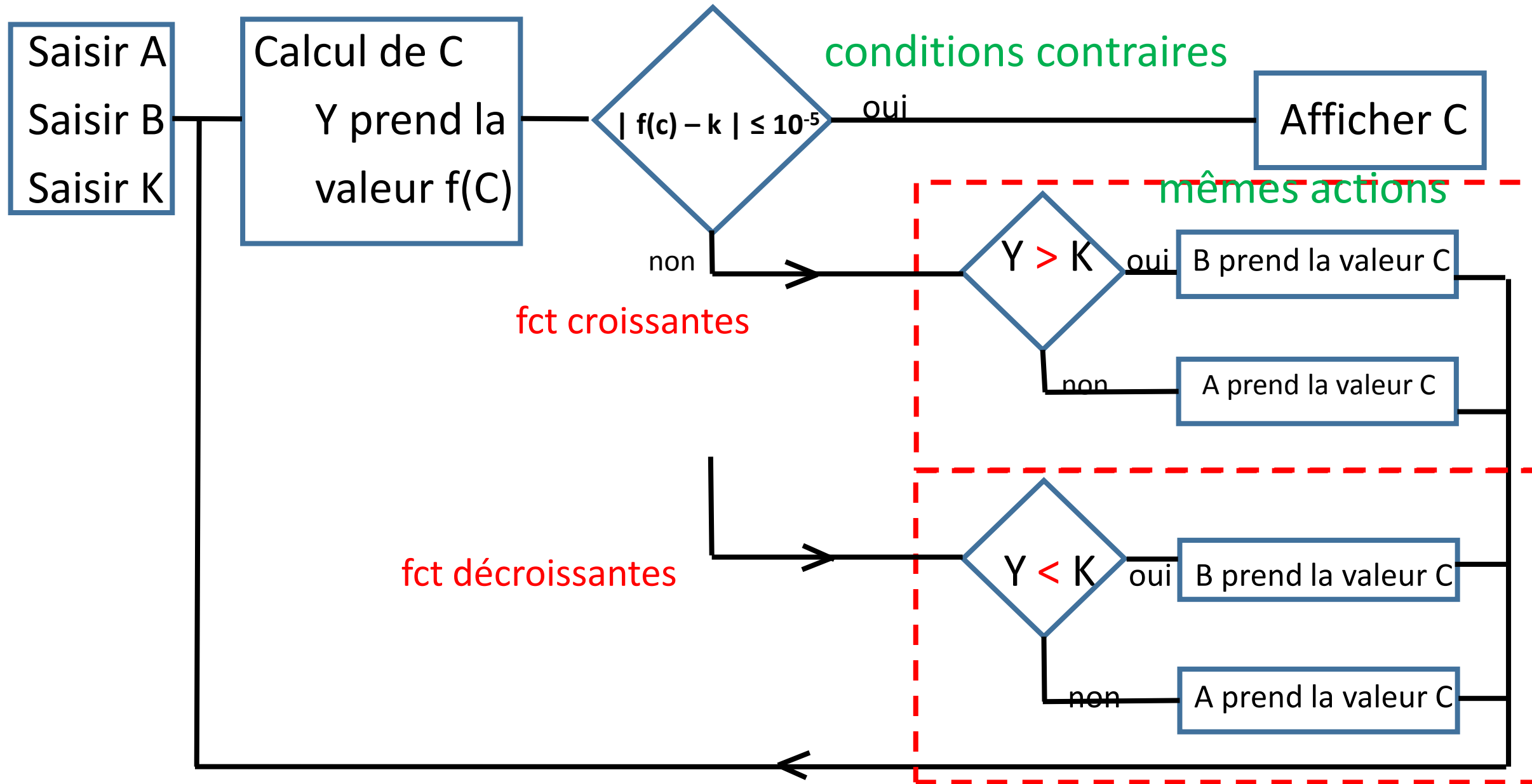
Conclusion : conditions contraires pour les mêmes actions
ou : mêmes conditions pour des actions contraires



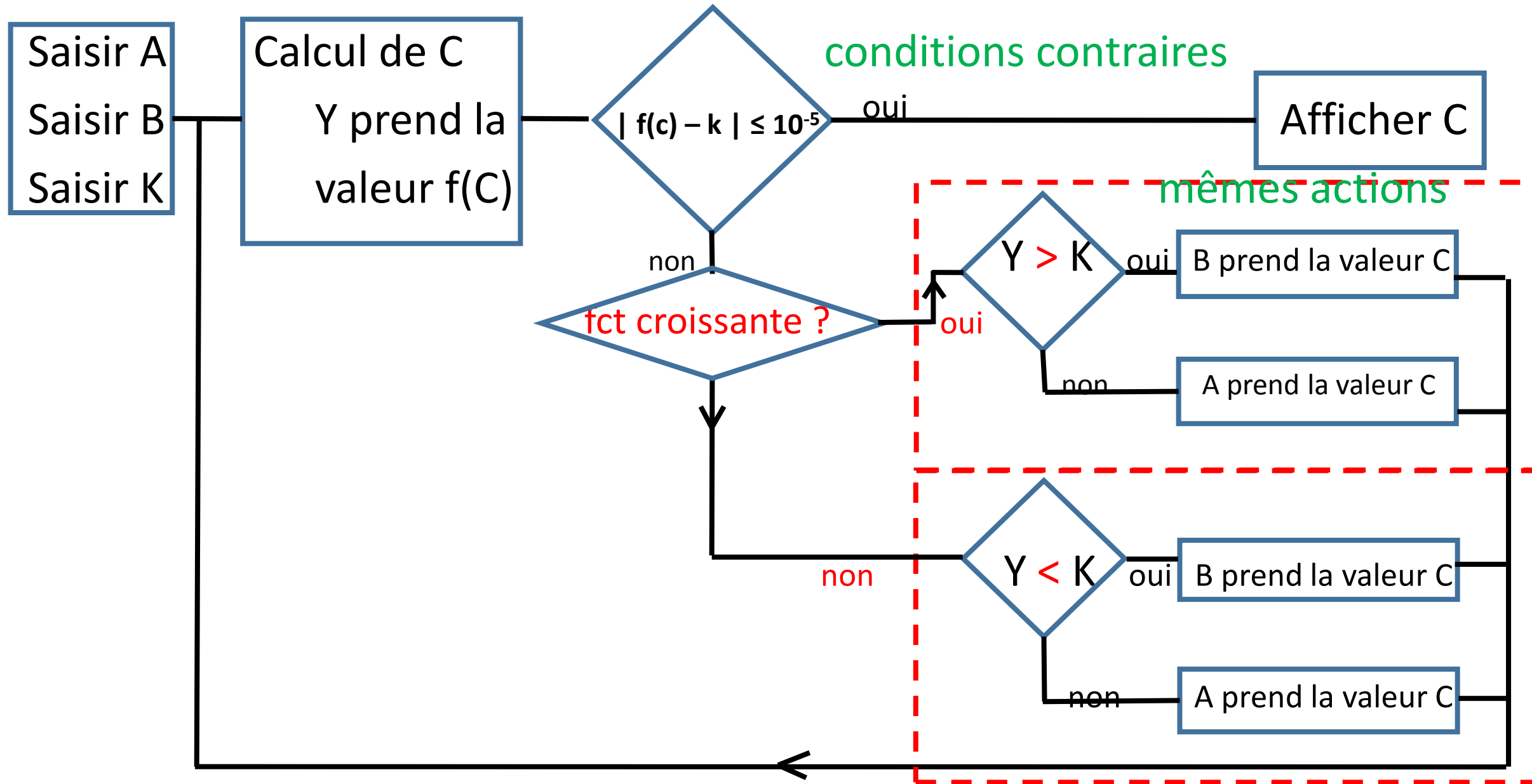
Modification de l'organigramme : 1^{ère} possibilité

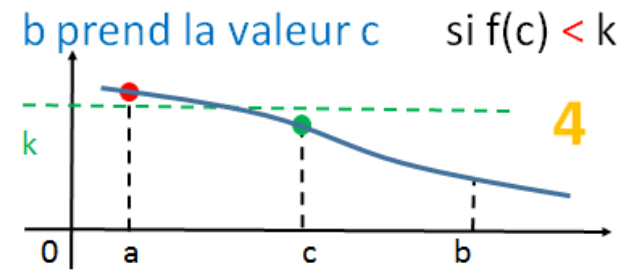
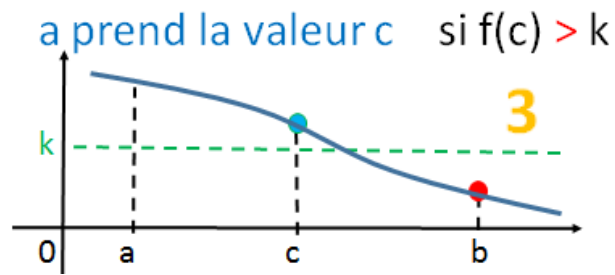
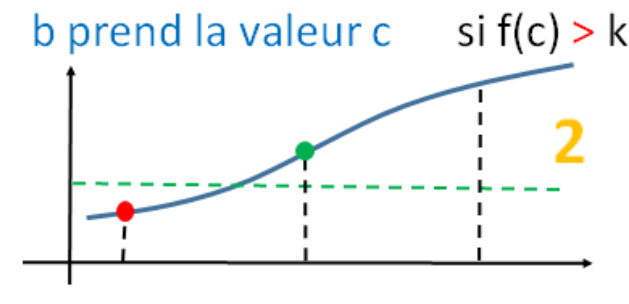
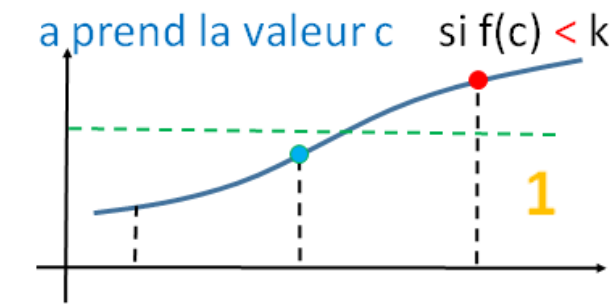


Modification de l'organigramme : 1^{ère} possibilité



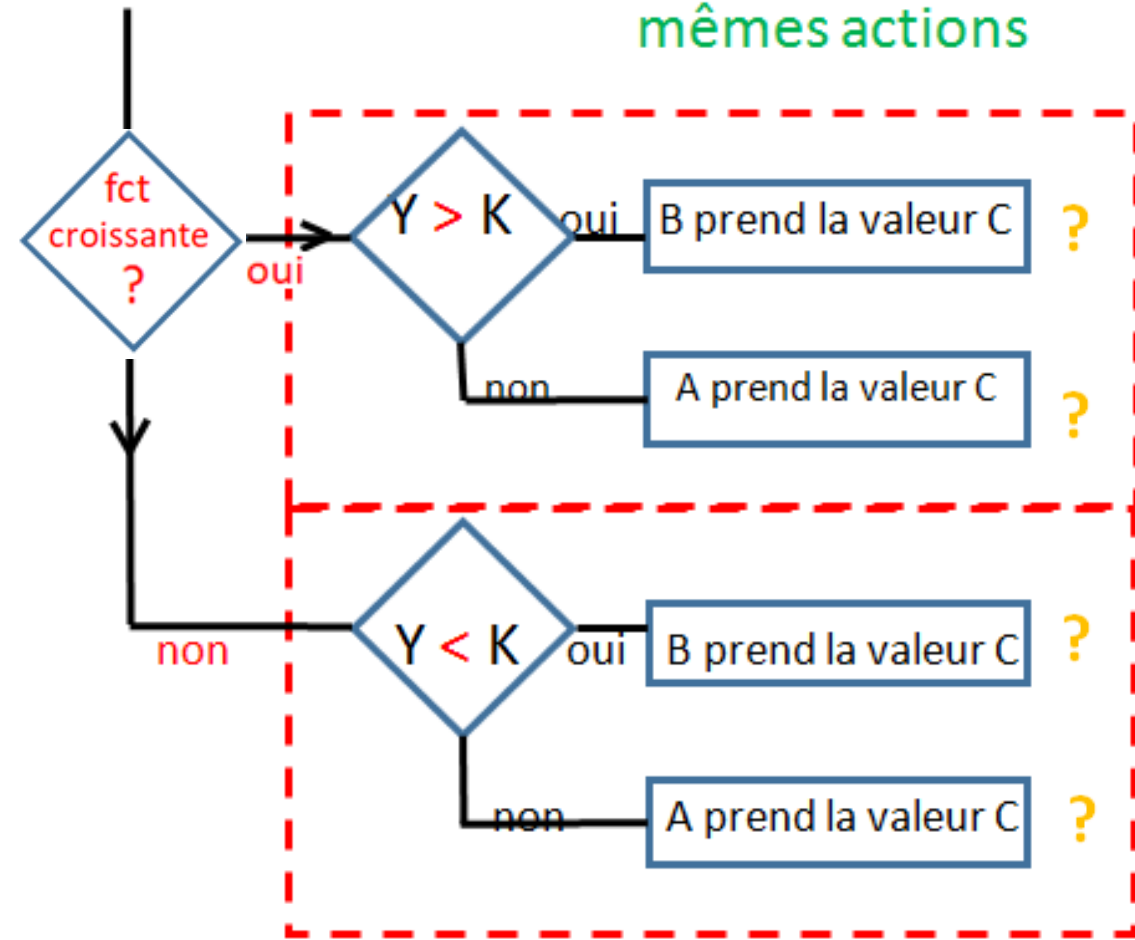
Modification de l'organigramme : 1^{ère} possibilité

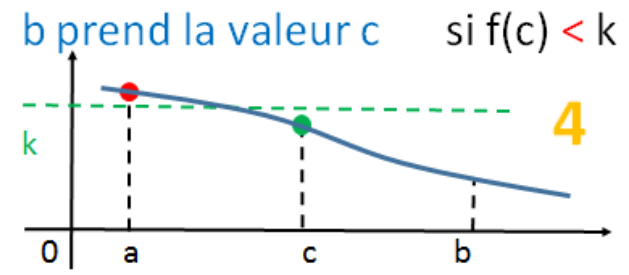
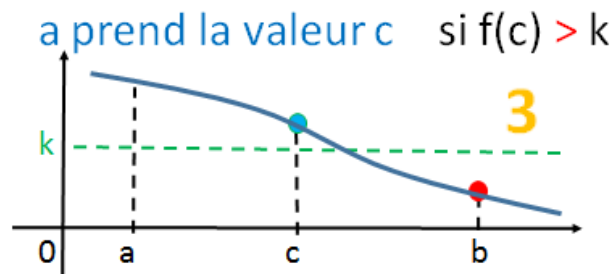
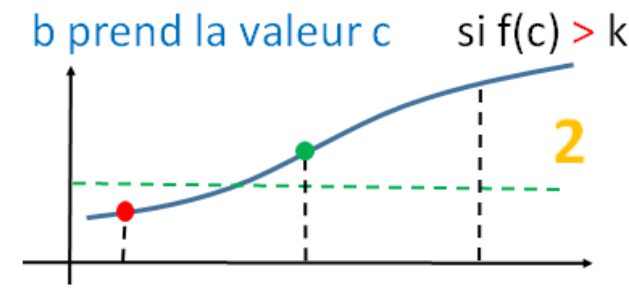
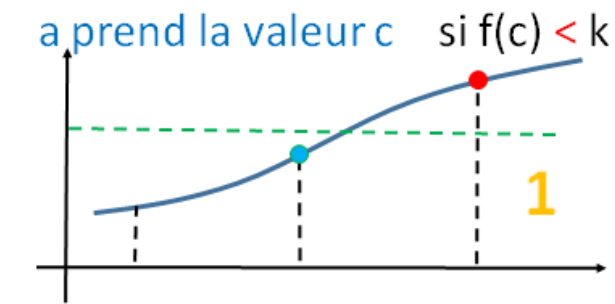




conditions contraires

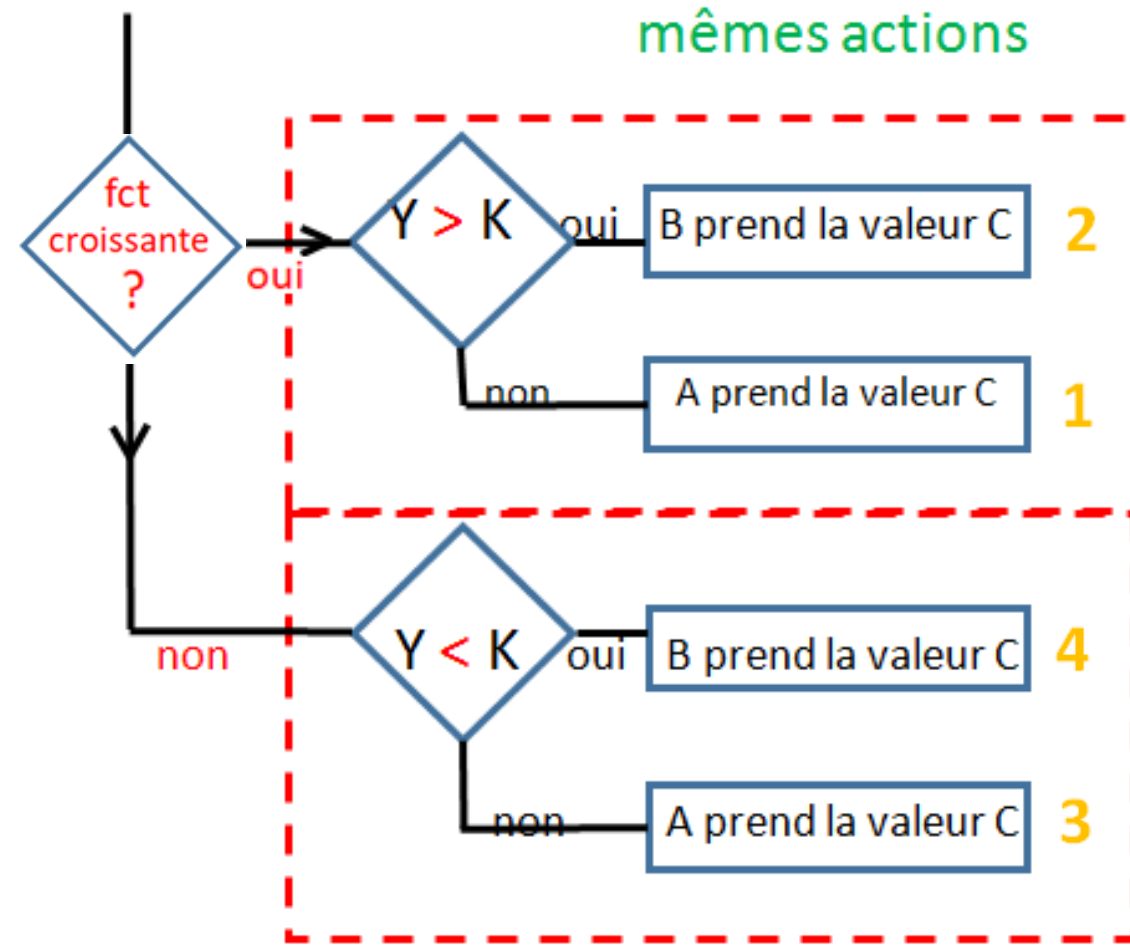
mêmes actions



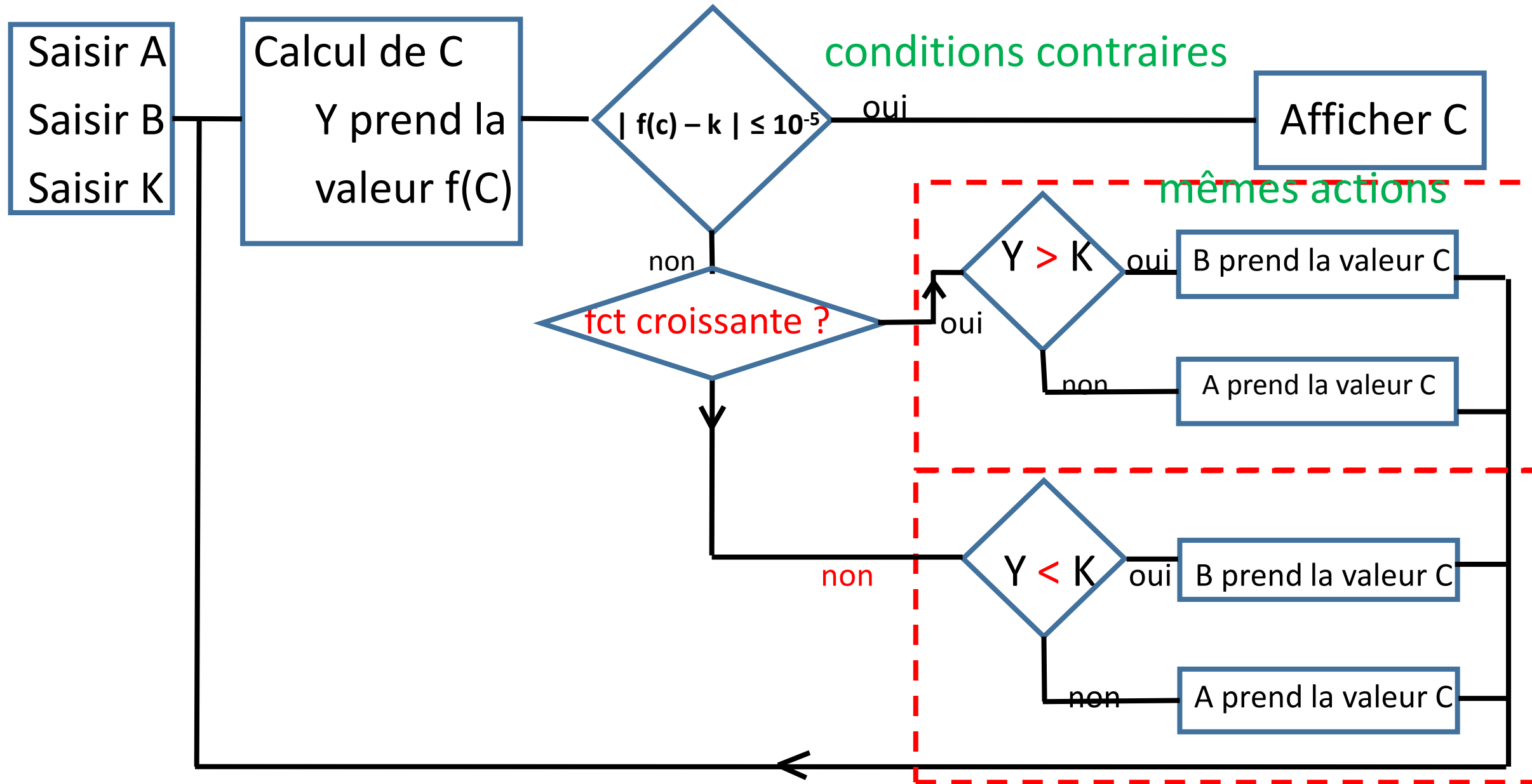


conditions contraires

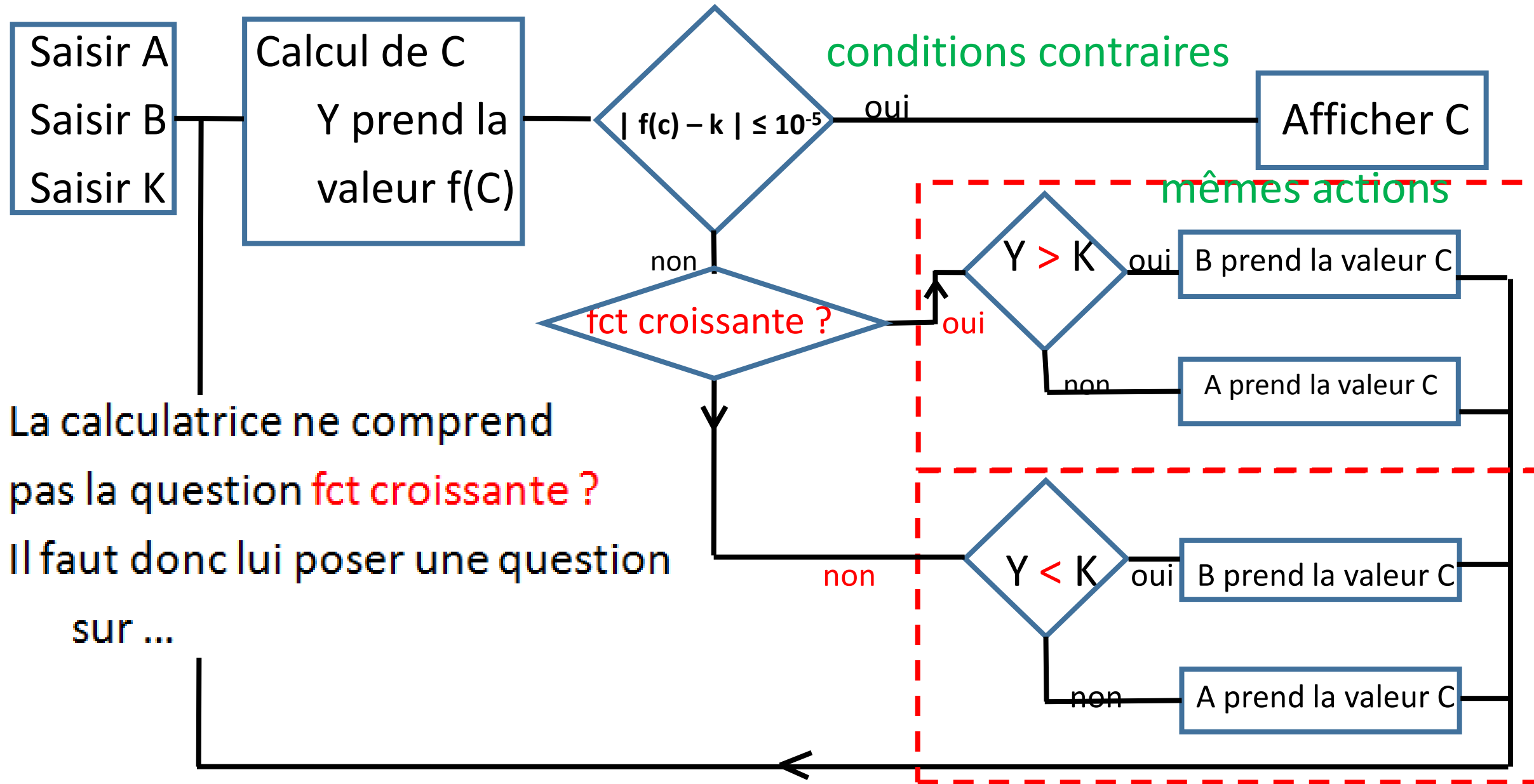
mêmes actions



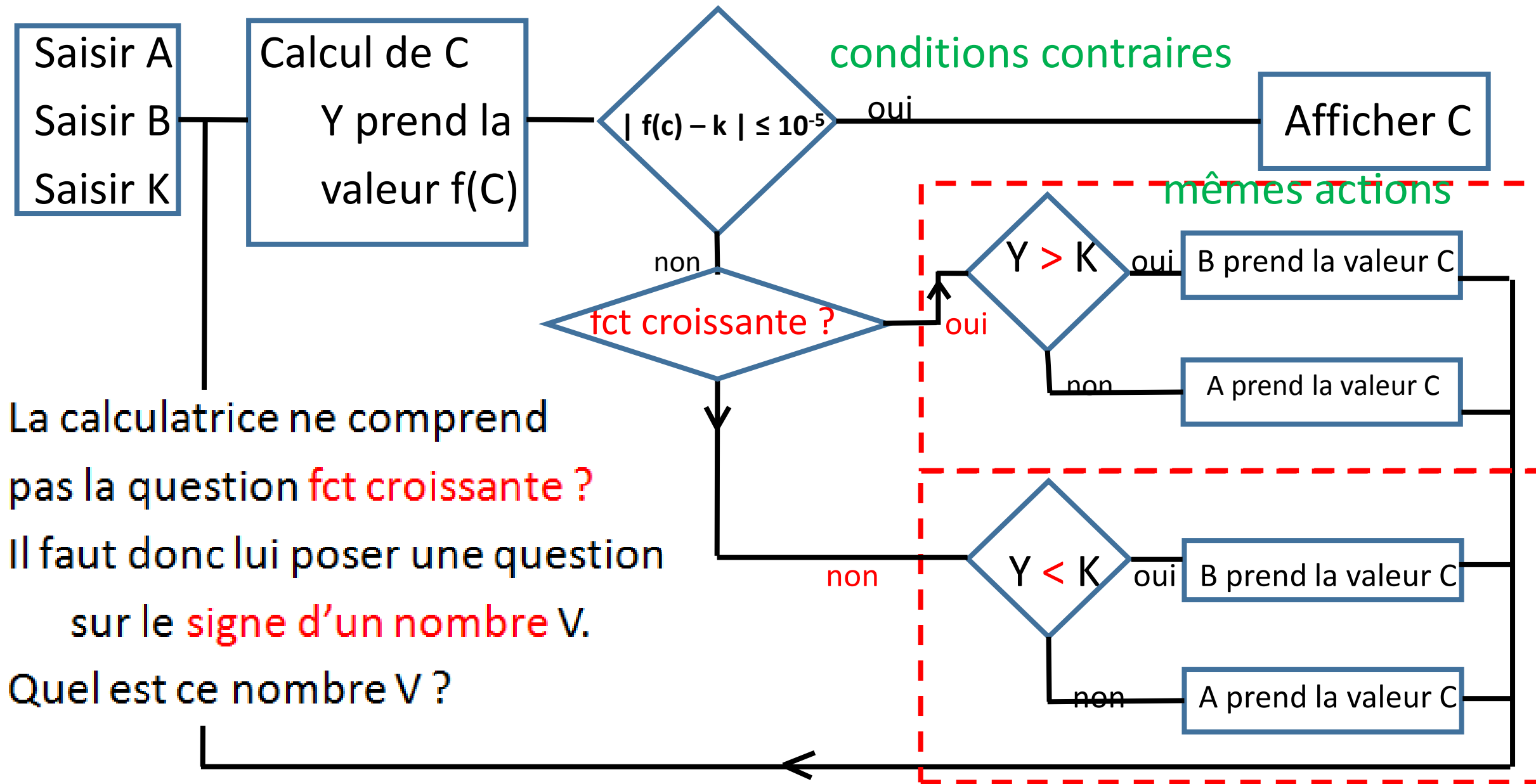
Modification de l'organigramme : 1^{ère} possibilité



Modification de l'organigramme : 1^{ère} possibilité



Modification de l'organigramme : 1^{ère} possibilité



question fct croissante ?

remplacée par signe d'un nombre V ?

Quel est ce nombre V ?

$V = \dots$

question **fct croissante ?**

remplacée par **signe d'un nombre V ?**

Quel est ce nombre V ?

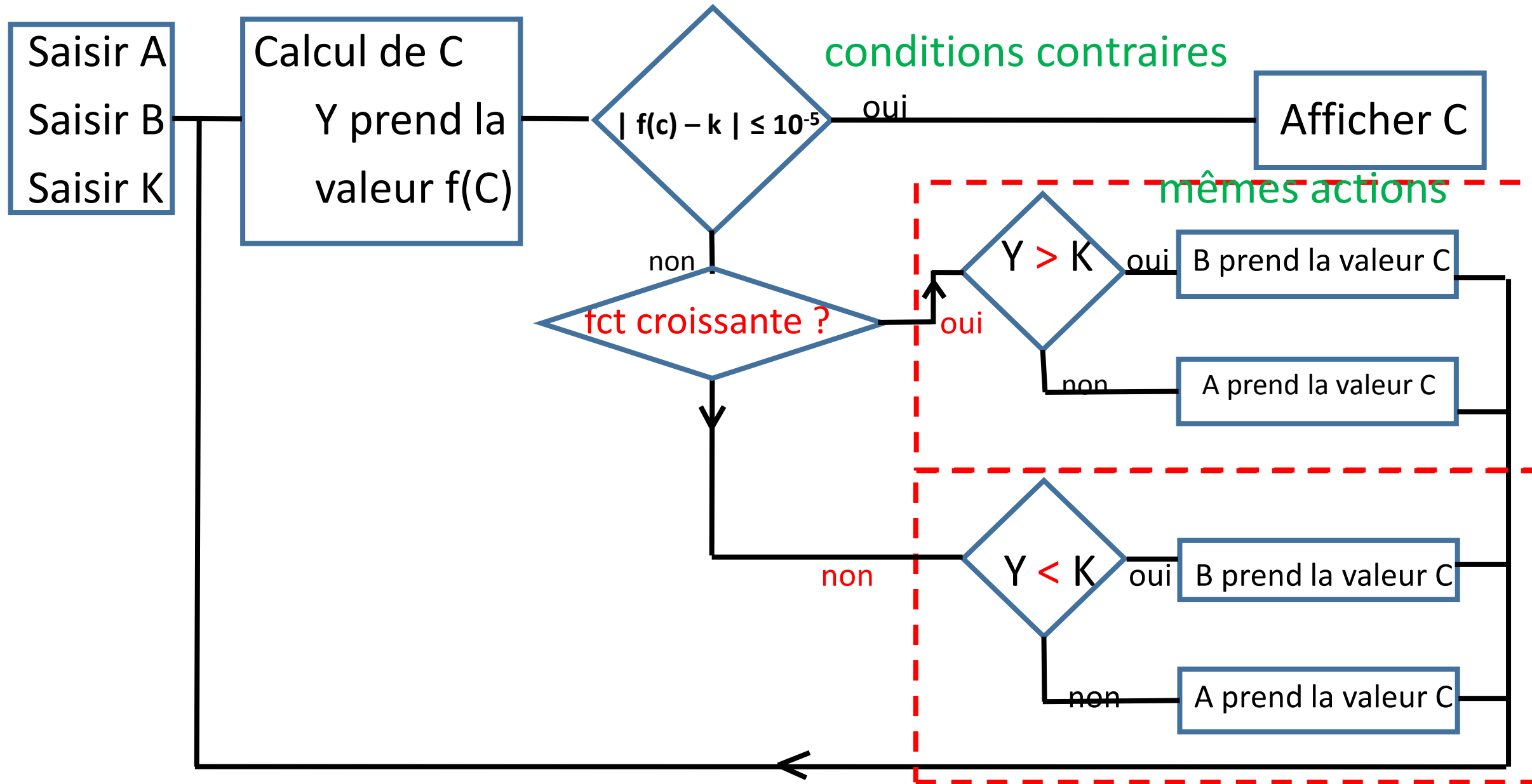
$$V = f(B) - f(A)$$

car les antécédents sont ordonnés : $A < B$

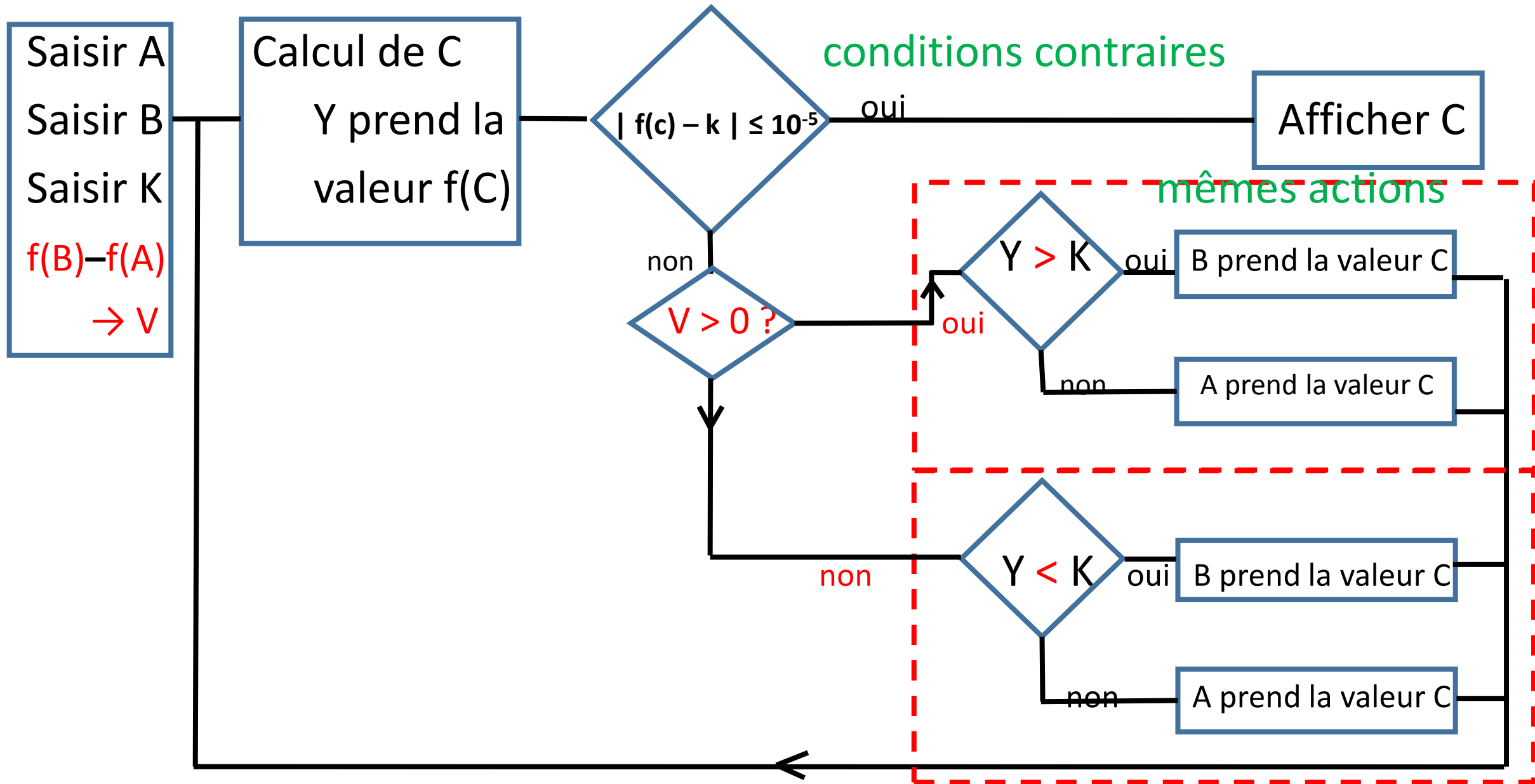
et la fct croissante conserve l'ordre $\Rightarrow f(A) < f(B) \iff f(B) - f(A) > 0$

et la fct **dé**croissante inverse l'ordre $\Rightarrow f(A) > f(B) \iff f(B) - f(A) < 0$

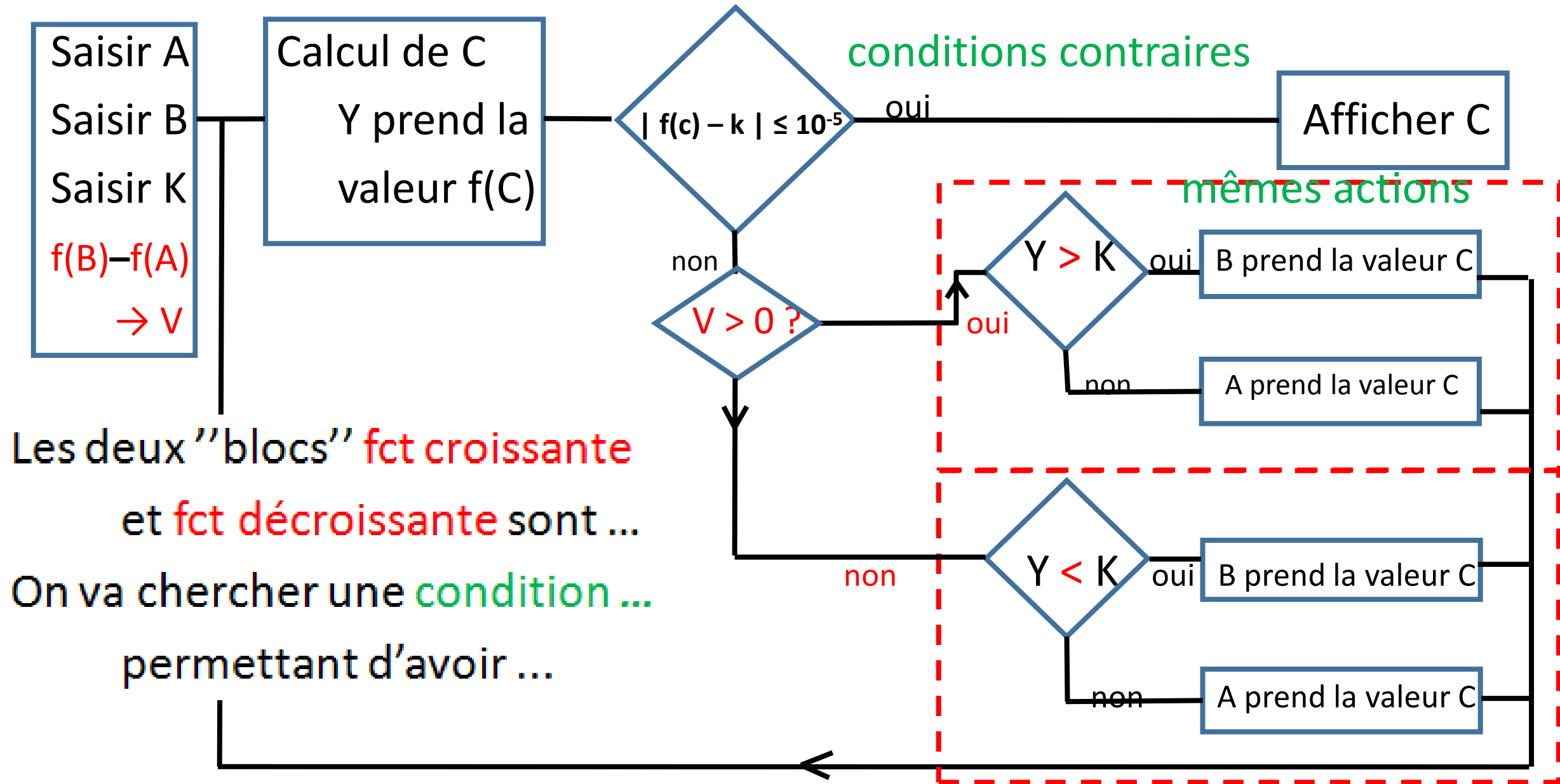
Modification de l'organigramme : 1^{ère} possibilité



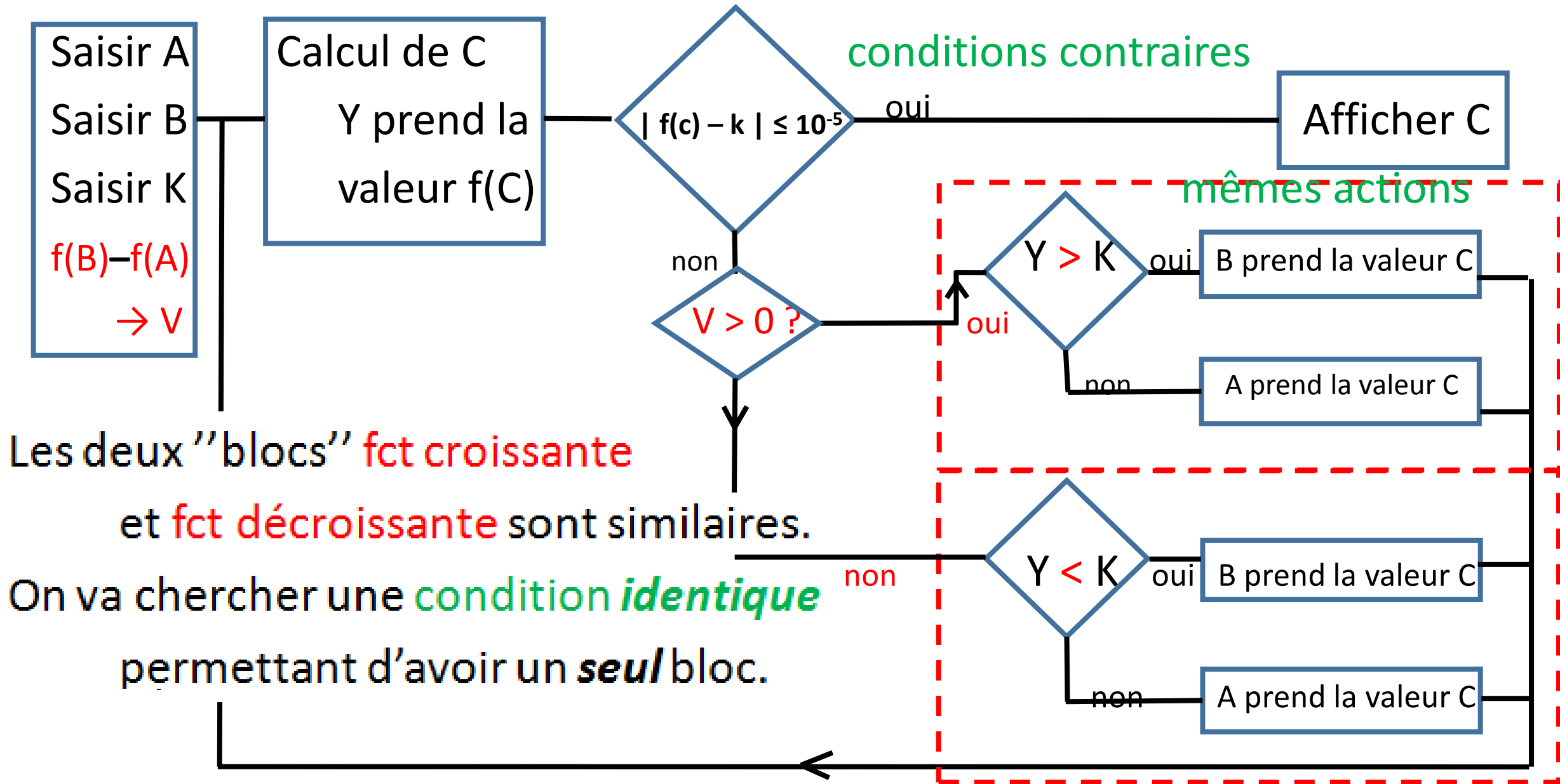
Modification de l'organigramme : 1^{ère} possibilité



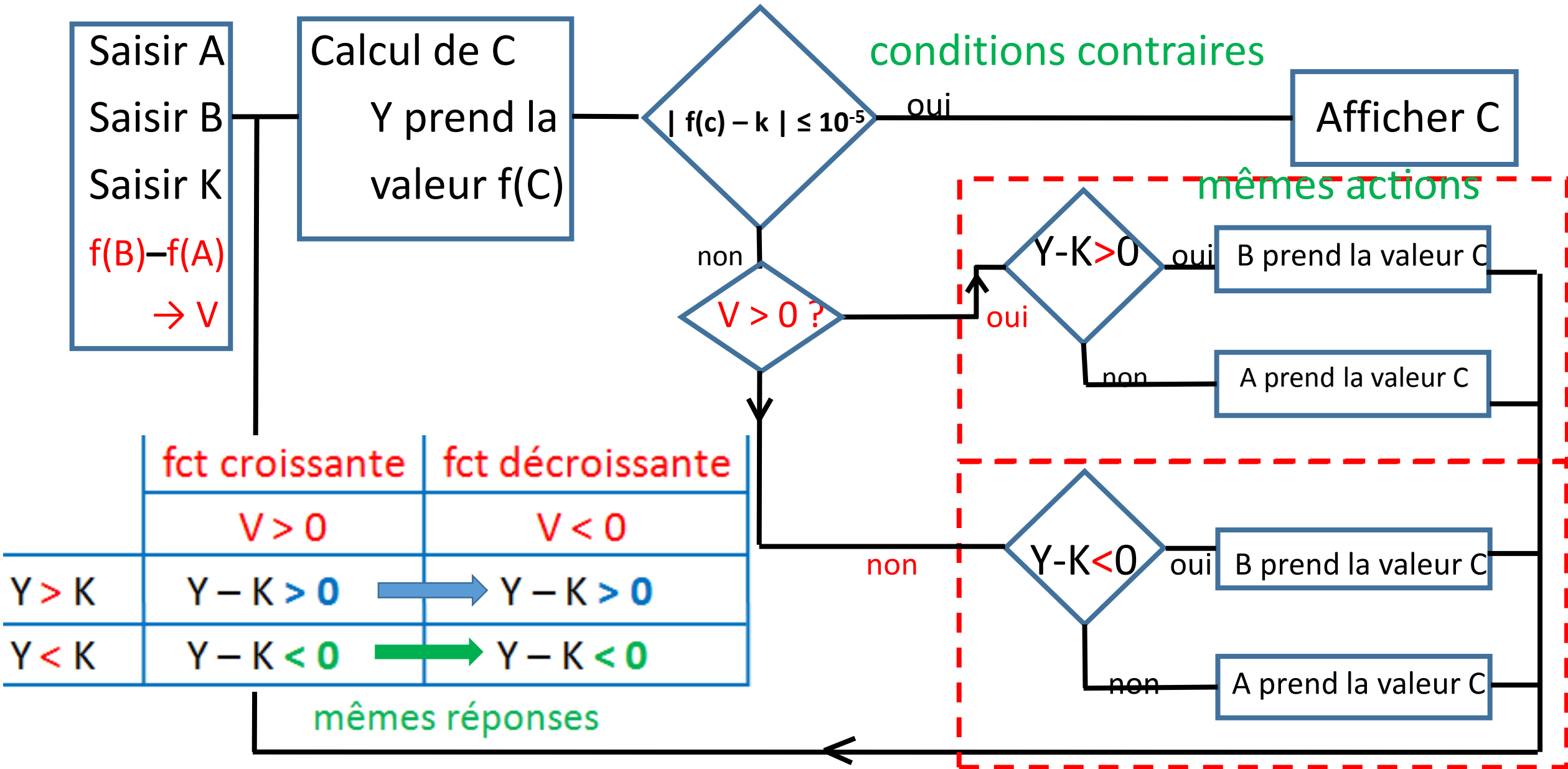
Modification de l'organigramme : 1^{ère} possibilité



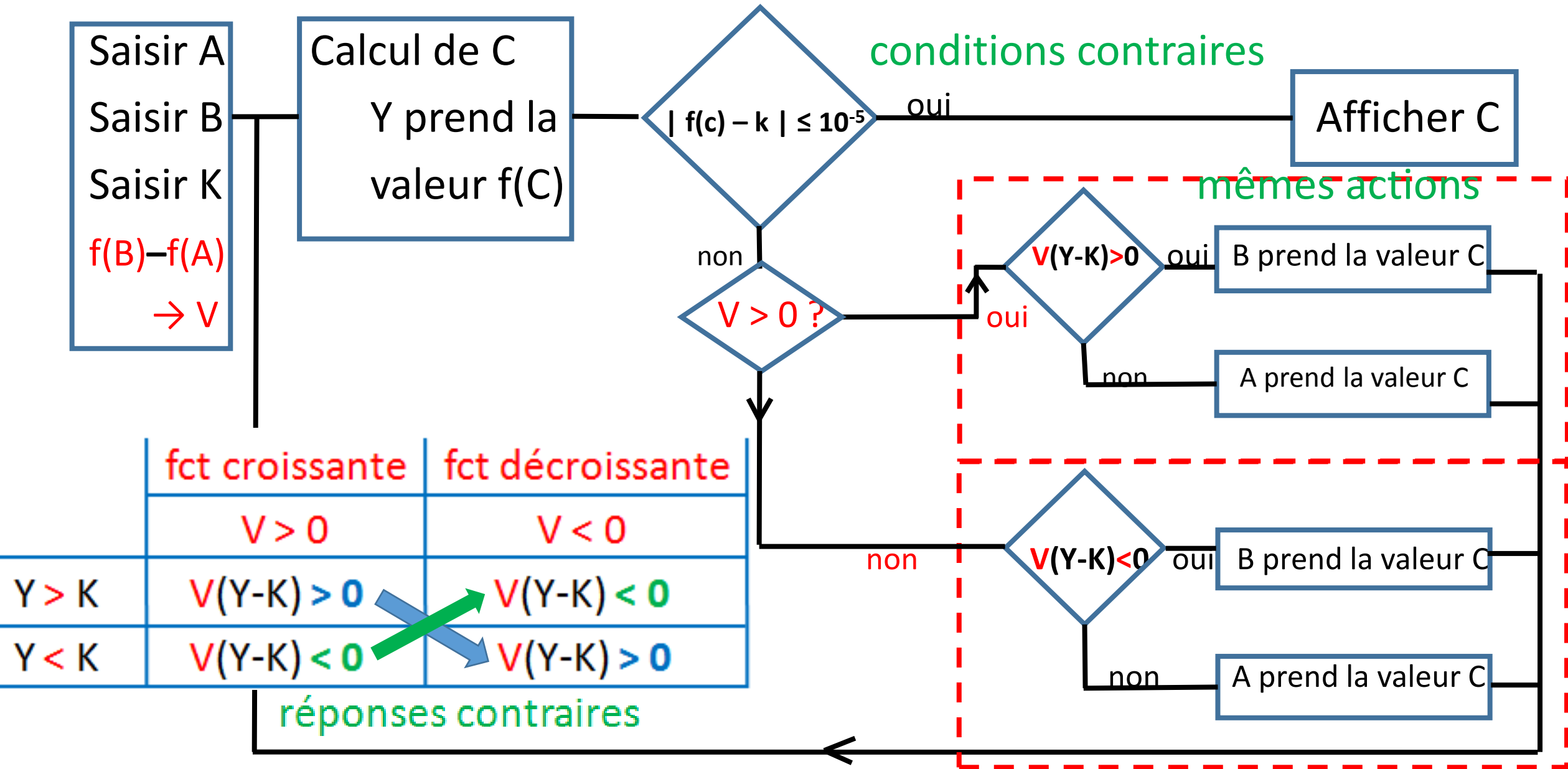
Modification de l'organigramme : 1^{ère} possibilité



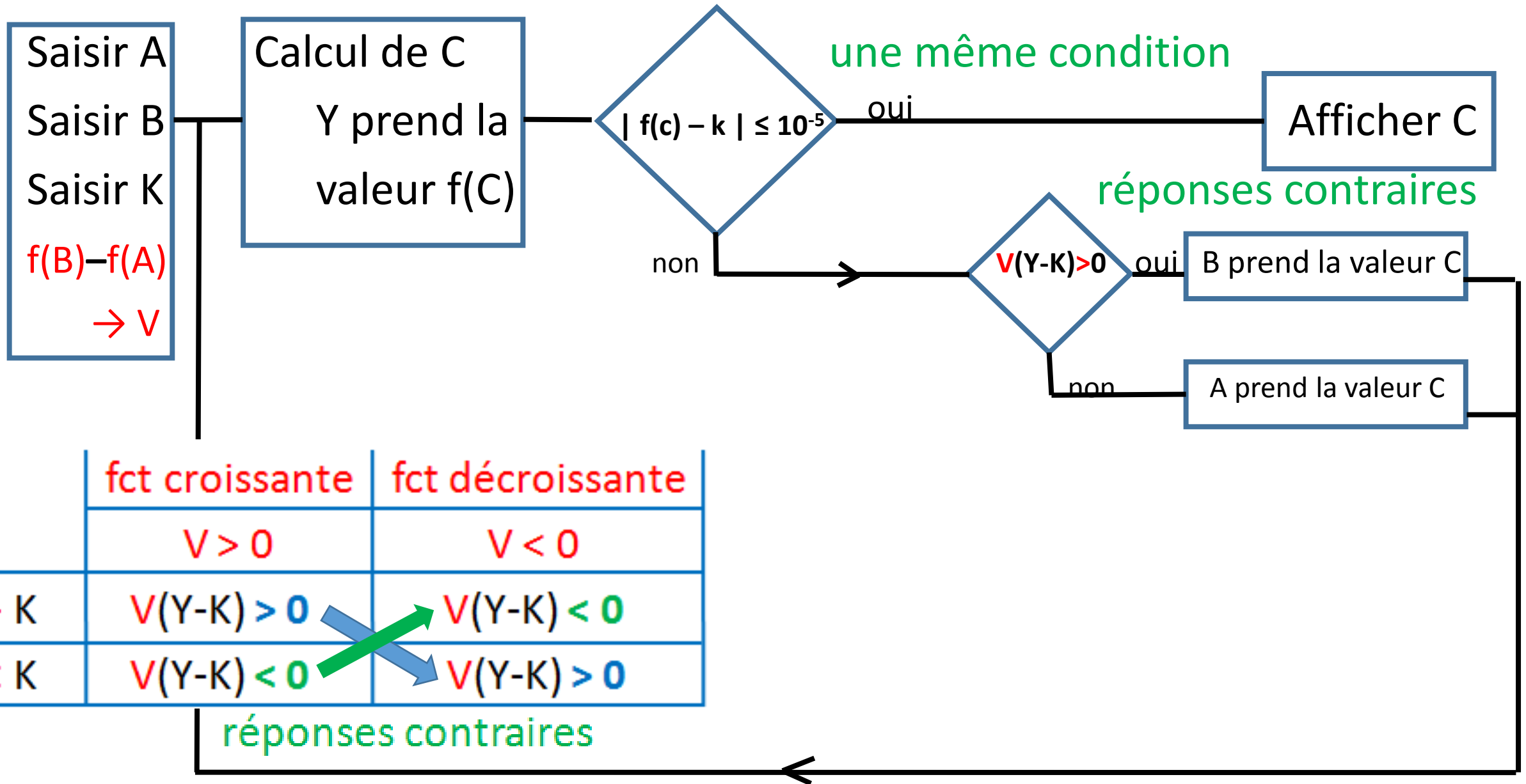
Modification de l'organigramme : 1^{ère} possibilité



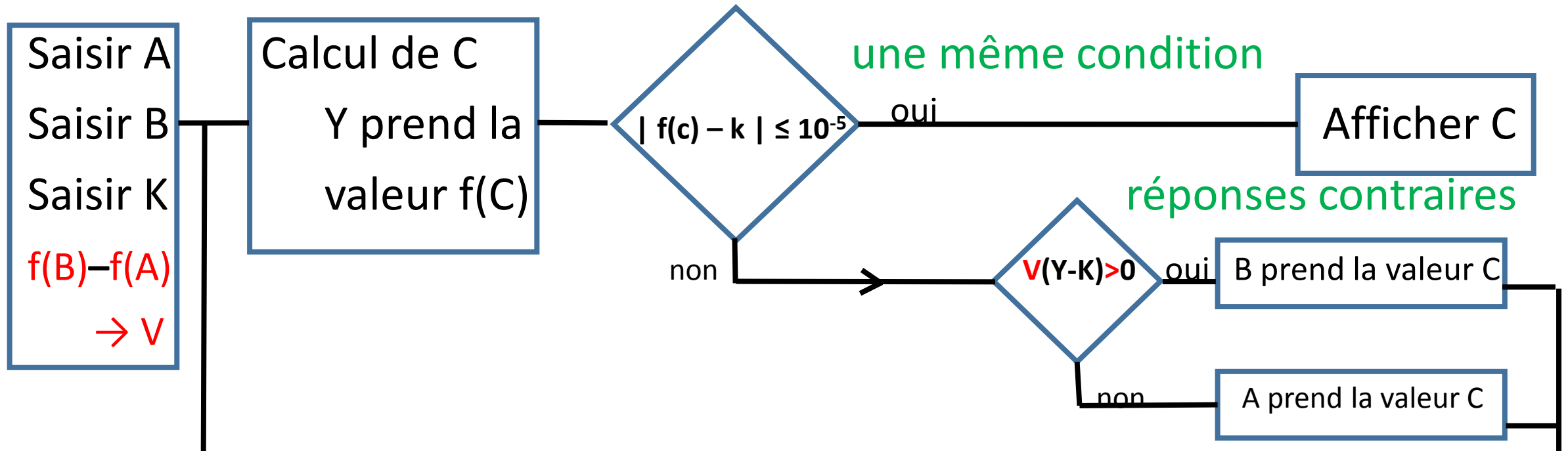
Modification de l'organigramme : 1^{ère} possibilité



Modification de l'organigramme : 1^{ère} possibilité



Modification de l'organigramme : 1^{ère} possibilité



	fct croissante	fct décroissante
	$V > 0$	$V < 0$
$Y > K$	$V(Y-K) > 0$	$V(Y-K) < 0$
$Y < K$	$V(Y-K) < 0$	$V(Y-K) > 0$

réponses contraires

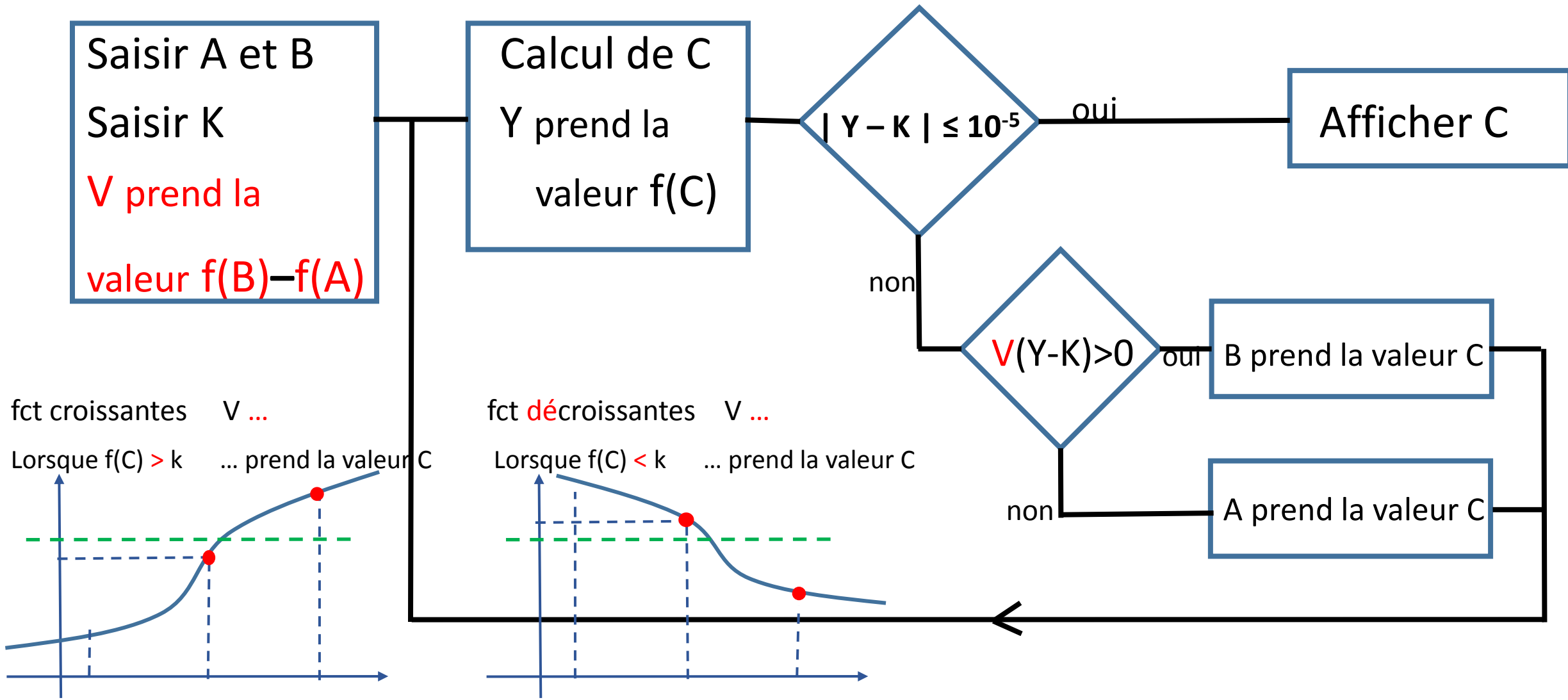
Une 2^{ème} possibilité

est proposée

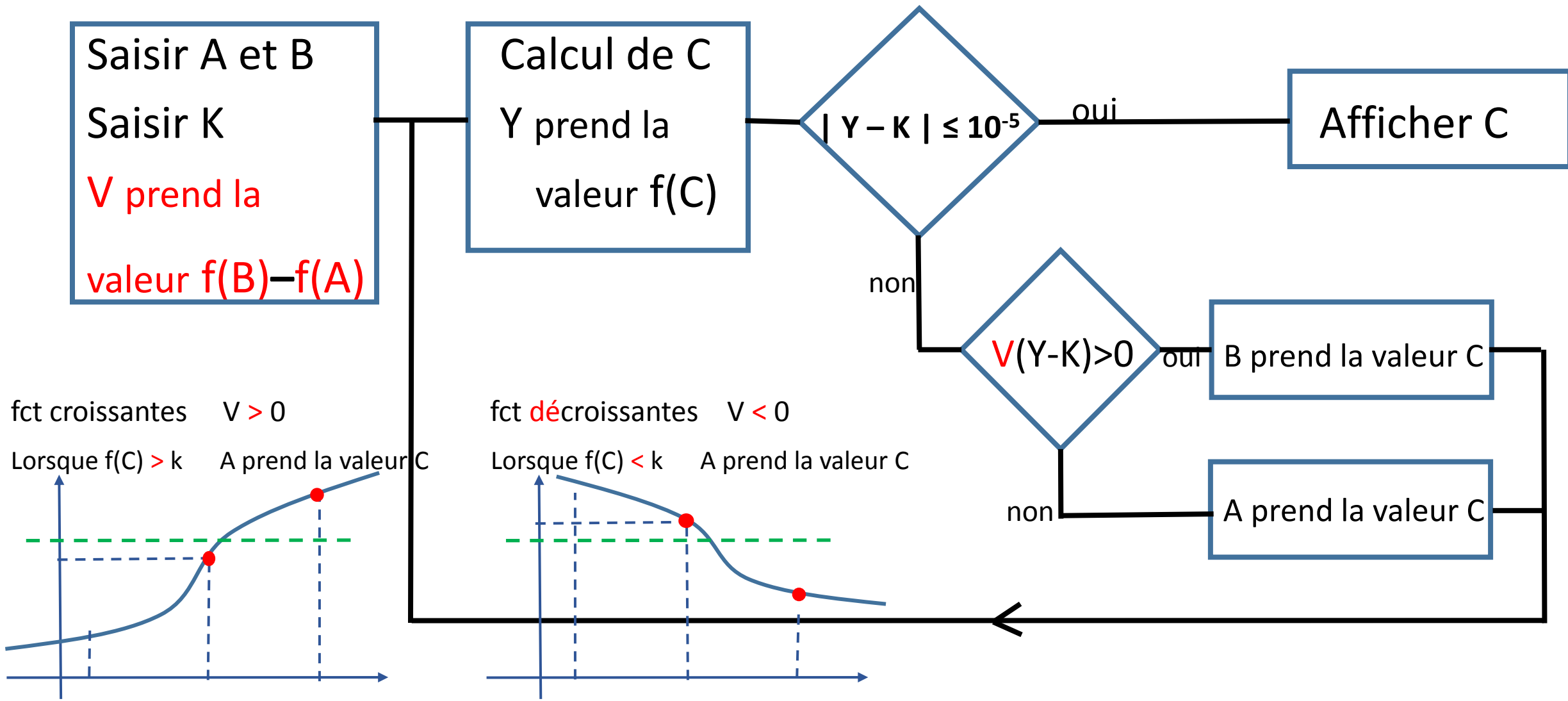
sur l'autre document.

conditions contraires
mêmes actions

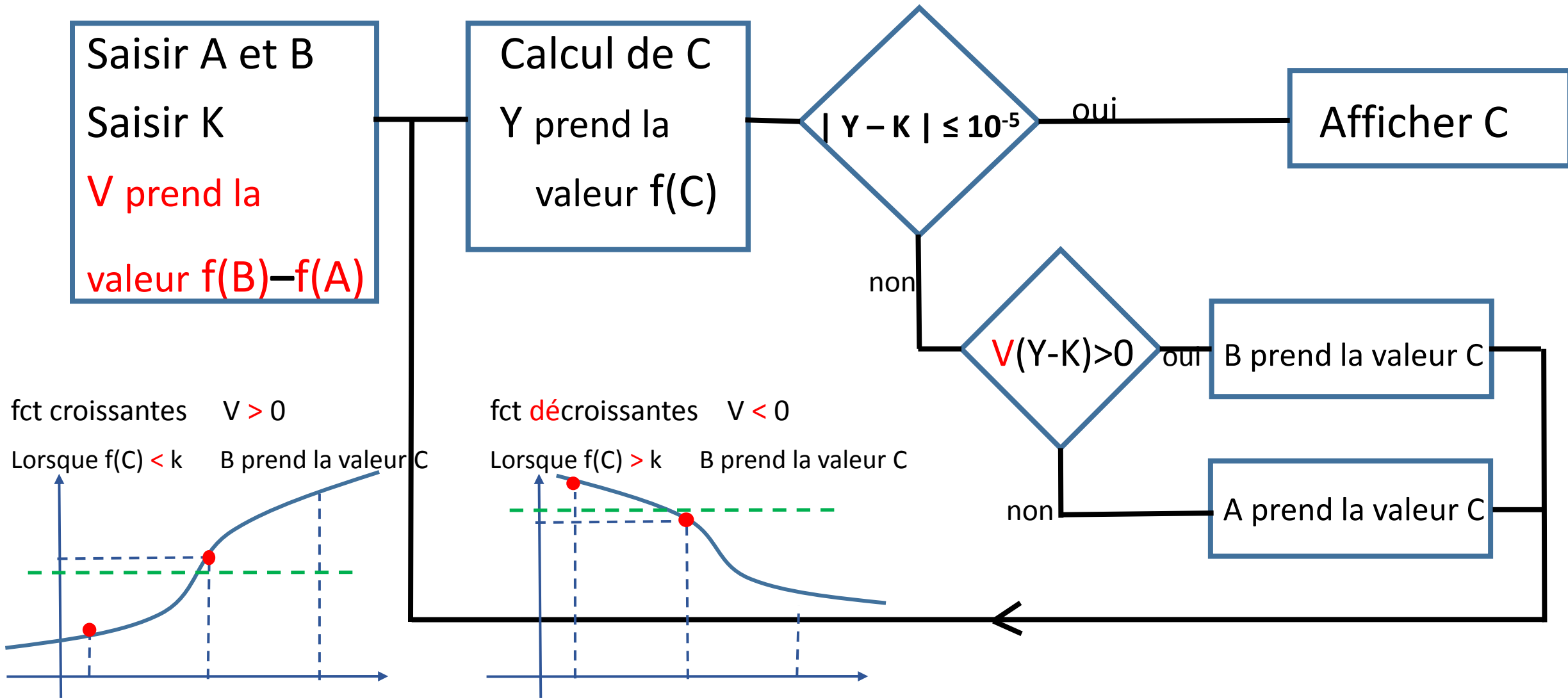
Organigramme **convenant aussi** **pour les monotonies décroissantes :**



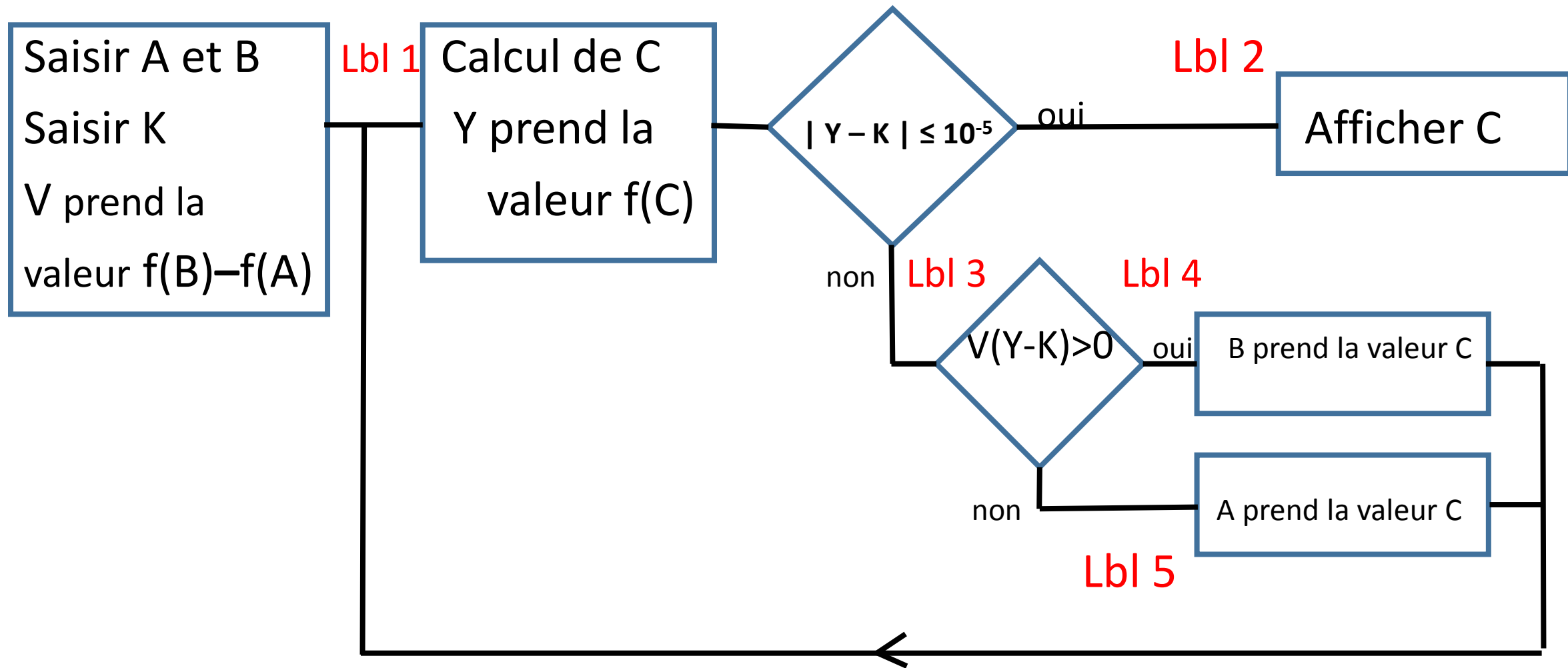
Organigramme **convenant aussi** pour les monotones **décroissantes** :



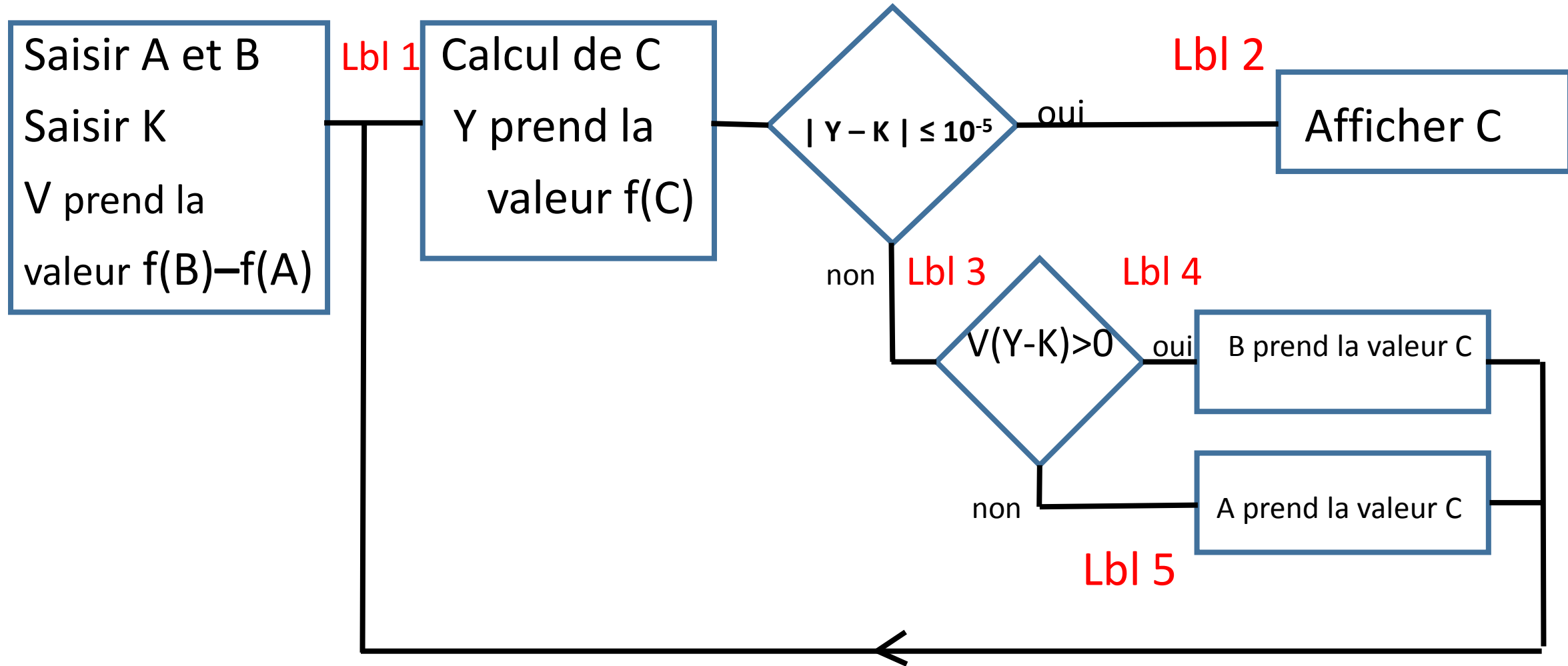
Organigramme **convenant aussi** pour les monotones **décroissantes** :



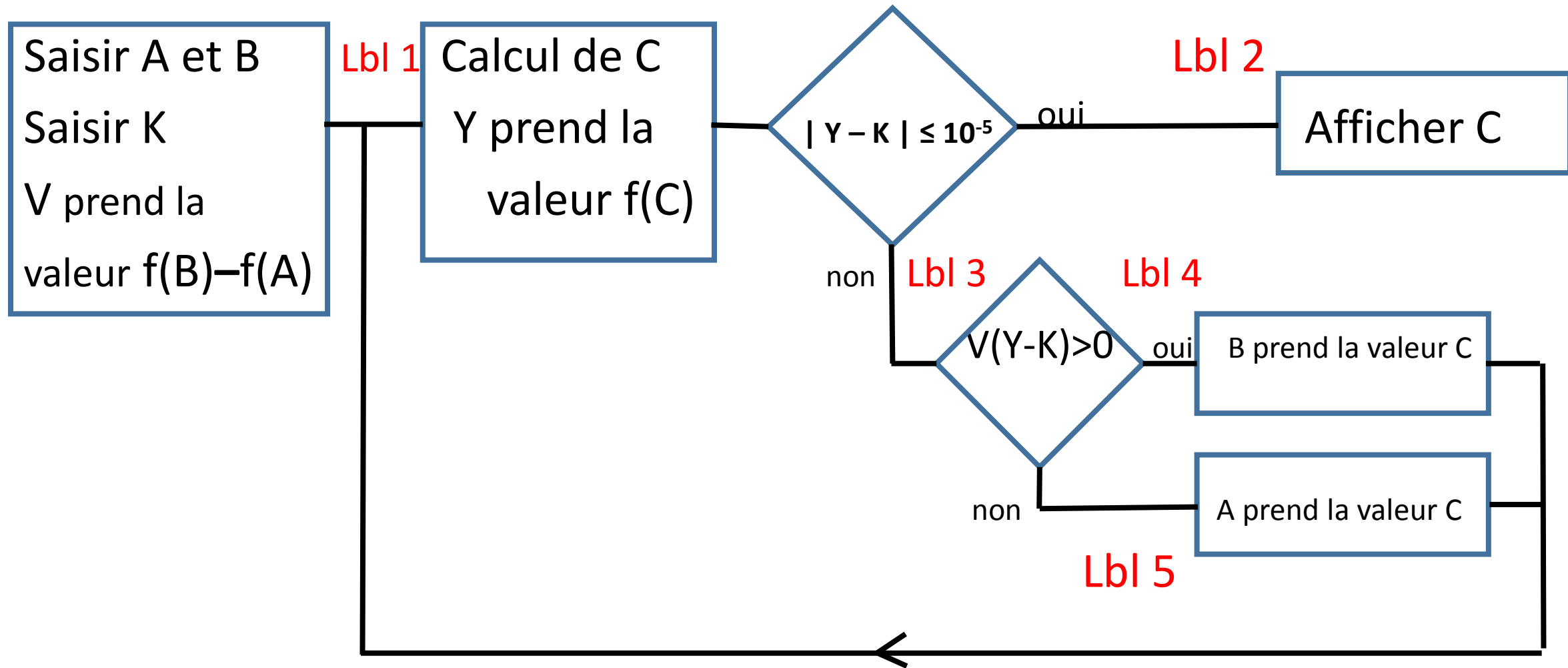
Programme :



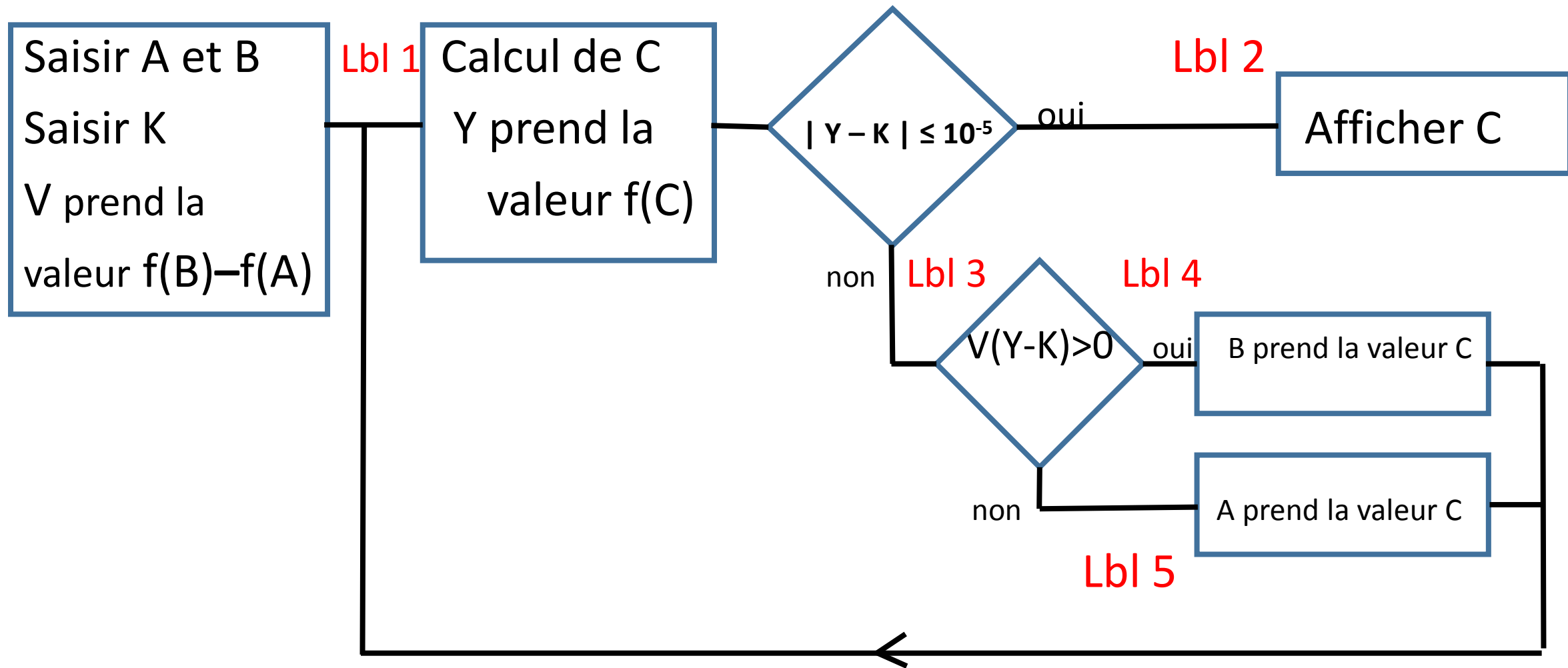
$? \rightarrow A : ? \rightarrow B : ? \rightarrow K : B^2 - A^2 \rightarrow V : \text{Lbl 1} : (A + B) \div 2 \rightarrow C : C^2 \rightarrow Y : \text{If Abs}$
 $(Y - K) \leq 10^{-5} : \text{Then Goto 2} : \text{Else Goto 3} : \text{Lbl 3} : \text{If } V(Y - K) > 0 : \text{Then}$
 $\text{Goto 4} : \text{Else Goto 5} : \text{Lbl 4} : C \rightarrow B : \text{Goto 1} : \text{Lbl 5} : C \rightarrow A : \text{Goto 1} : \text{Lbl 2} : C \triangleleft$



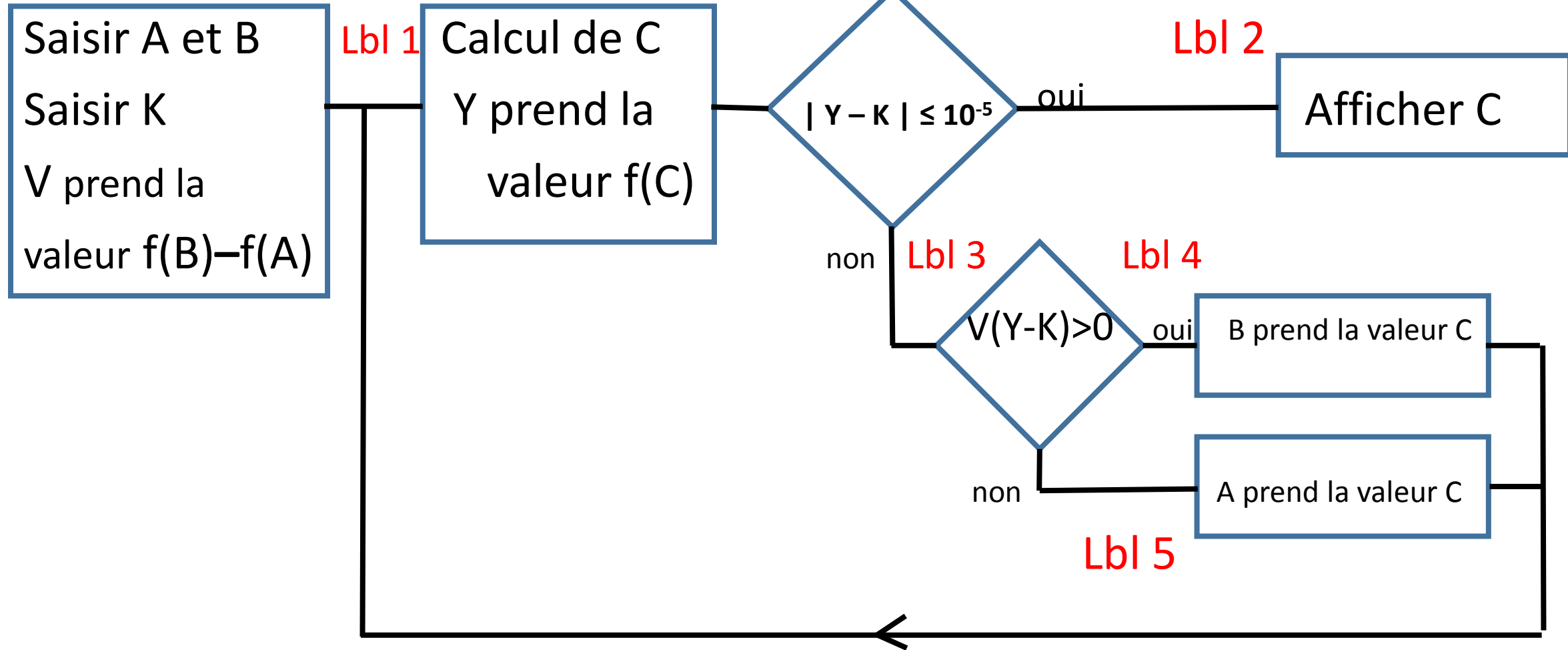
Si la fonction f n'est pas la fct x^2 , mais la fct $x^2+3x-124+\cos(\sin(3\pi+5x))$ nous avons un inconvénient : celui ...



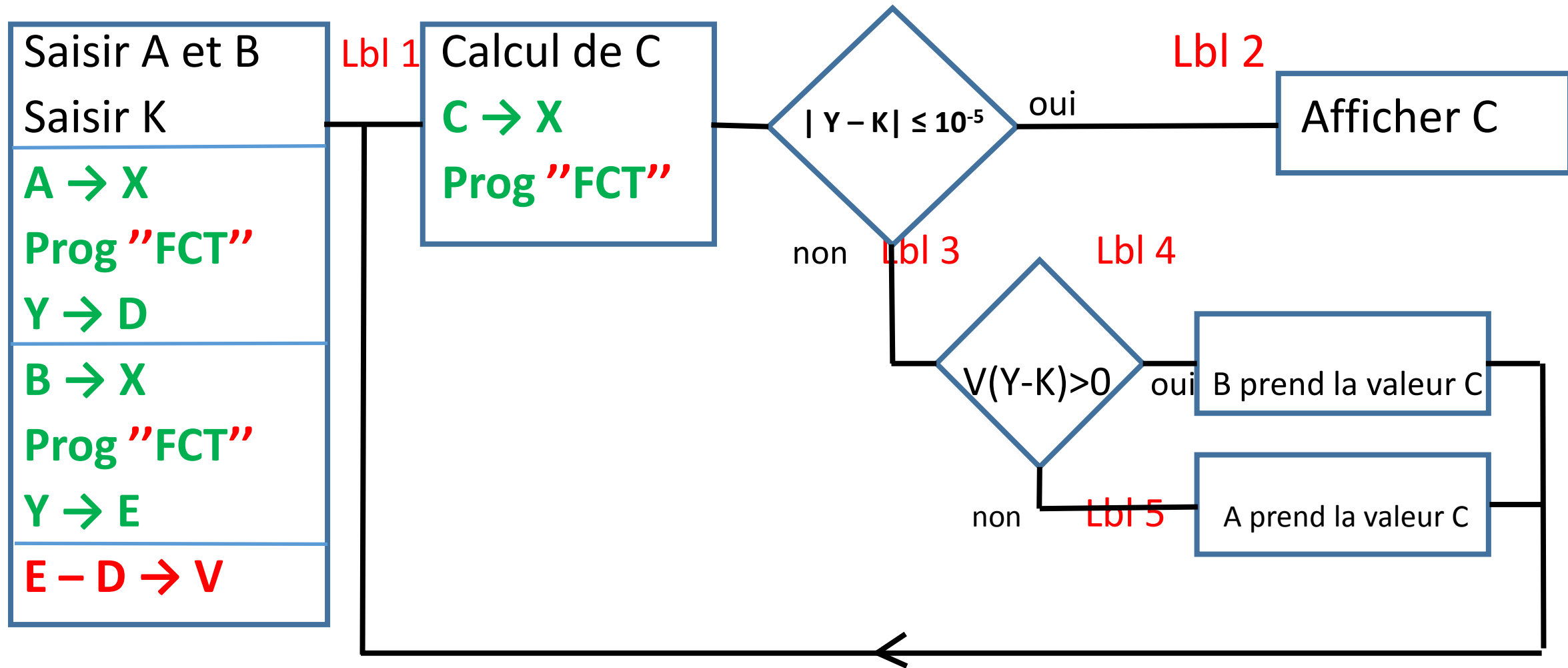
Si la fonction f n'est pas la fct x^2 , mais la fct $x^2+3x-124+\cos(\sin(3\pi+5x))$ nous avons un inconvénient : celui de devoir **taper 3 fois** l'expression $f(x)$!
Comment éliminer cet inconvénient ?



Si la fonction f n'est pas la fct x^2 , mais la fct $x^2+3x-124+\cos(\sin(3\pi+5x))$ nous avons un inconvénient : celui de devoir taper 3 fois l'expression $f(x)$! Comment éliminer cet inconvénient ? En utilisant 3 fois un seul sous-pgm $f(x)$ que je nomme **FCT**.
Prog (sous-pgm) se trouve dans **Shift Pgm** → **CTL**.

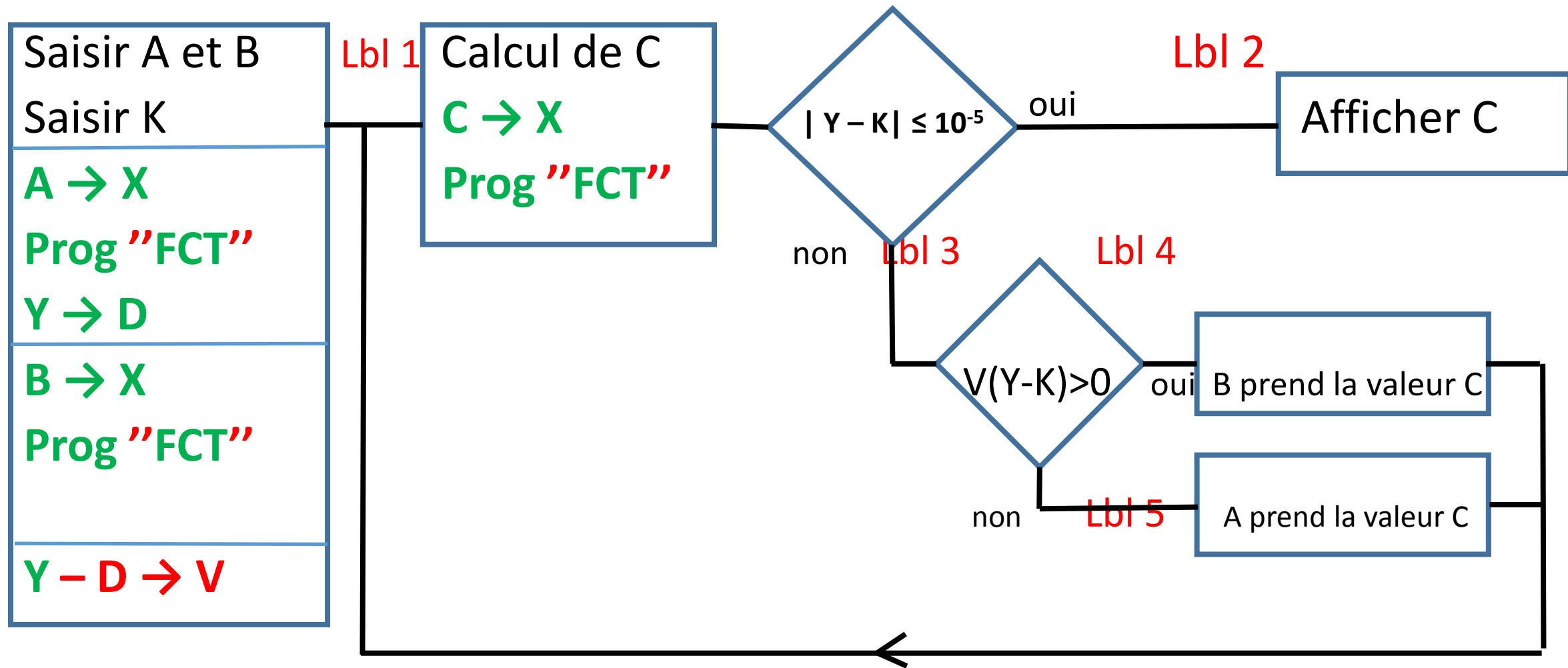


Si la fonction f n'est pas la fct x^2 , mais la fct $x^2+3x-124+\cos(\sin(3\pi+5x))$
nous avons un inconvénient : celui de devoir taper 3 fois l'expression $f(x)$!
Comment éliminer cet inconvénient ? En utilisant 3 fois un seul sous-pgm $f(x)$ que je nomme **FCT**.
Prog (sous-pgm) se trouve dans **Shift Pgm** → **CTL**.



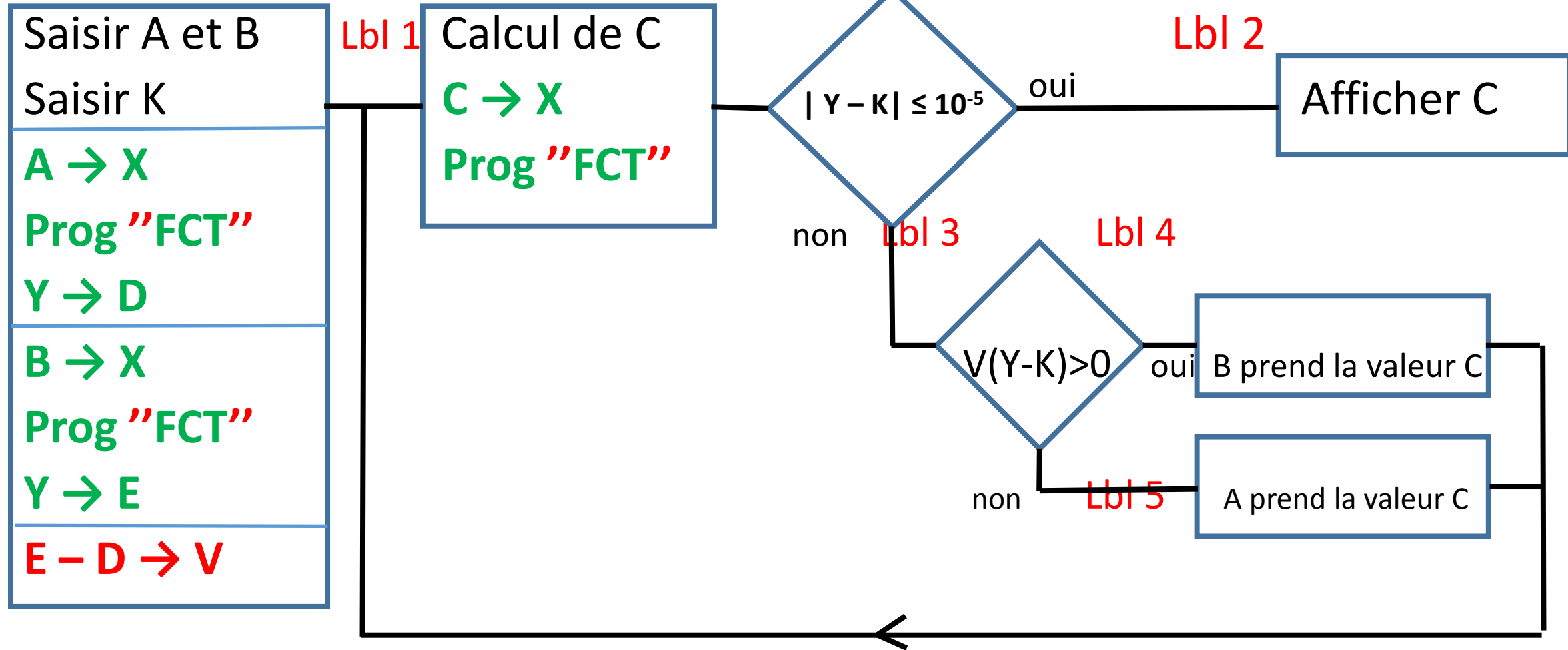
Variante :

on peut économiser l'écriture de $Y \rightarrow E$



$? \rightarrow A : ? \rightarrow B : ? \rightarrow K : A \rightarrow X : \text{Prog "FCT"} : Y \rightarrow D : B \rightarrow X : \text{Prog "FCT"} : Y \rightarrow E$
 $: E - D \rightarrow V : \text{Lbl 1} : (A+B)/2 \rightarrow C : C \rightarrow X : \text{Prog "FCT"} : \text{If } \text{Abs}(Y-K) \leq 10^{-5} : \text{Then Goto 2} : \text{Else}$
 $\text{Goto 3} : \text{Lbl 3} : \text{If } V(Y-K) > 0 : \text{Then Goto 4} : \text{Else Goto 5} : \text{Lbl 4} : C \rightarrow B : \text{Goto 1} : \text{Lbl 5} : C \rightarrow A :$
 $\text{Goto 1} : \text{Lbl 2} : C \nabla$

Et pour le programme FCT : $X^2 \rightarrow Y$ Prog se trouve dans Shift Pgm $\rightarrow$ CTL.



On crée donc un 1^{er} programme **DICHOTO** :

? $\rightarrow$ A : ? $\rightarrow$ B : ? $\rightarrow$ K : A $\rightarrow$ X : Prog "FCT" : Y $\rightarrow$ D : B $\rightarrow$
X : Prog "FCT" : Y $\rightarrow$ E : E - D $\rightarrow$ V : Lbl 1 : (A+B)/2 $\rightarrow$ C :
C $\rightarrow$ X : Prog "FCT" : If Abs(Y - K) $\leq$ 10⁻⁵ : Then Goto 2 :
Else Goto 3 : Lbl 3 : If V(Y-K) > 0 : Then Goto 4 : Else
Goto 5 : Lbl 4 : C $\rightarrow$ B : Goto 1 : Lbl 5 : C $\rightarrow$ A : Goto 1 :
Lbl 2 : C $\triangleleft$

Prog se trouve dans Shift Pgm puis CTL.

Abs se trouve dans OPTN puis NUM.

Et un 2^{ème} programme **FCT** : $x^2 \rightarrow Y$

(si $f(x) = x^2$! Par ex. si $f(x) = 3x + 2$ on tape $3X + 2 \rightarrow Y$)

Application : déterminez les solutions approchées
(avec 10 chiffres) des équations suivantes sur les
intervalles, et concluez :

$$x^2 = 4 \text{ sur } [0 ; 6]$$

$$x^2 = 4 \text{ sur } [- 6 ; 0]$$

$$x^2 = 2 \text{ sur } [0 ; 3]$$

$$x^2 = 3 \text{ sur } [1 ; 5]$$

$$x^2 = 9 \text{ sur } [0 ; 6]$$

$$x^2 = 9 \text{ sur } [- 4 ; - 1]$$

Application : déterminez les solutions approchées
(avec 10 chiffres) des équations suivantes sur les
intervalles, et concluez :

$$x^2 = 4 \text{ sur } [0 ; 6] \quad x \approx 1,9999998093$$

$$x^2 = 4 \text{ sur } [- 6 ; 0] \quad x \approx - 1,9999998093$$

$$x^2 = 2 \text{ sur } [0 ; 3] \quad x \approx 1,414215088$$

$$x^2 = 3 \text{ sur } [1 ; 5] \quad x \approx 1,732048035$$

$$x^2 = 9 \text{ sur } [0 ; 6] \quad x \approx 3$$

$$x^2 = 9 \text{ sur } [- 4 ; - 1] \quad x \approx - 3,0000000954$$

Application : déterminez les solutions approchées
(avec 10 chiffres) des équations suivantes sur les
intervalles, et concluez :

$x^2 = 4$ sur $[0 ; 6]$	$x \approx 1,9999998093$	<i>au lieu de</i>	$x = 2$
$x^2 = 4$ sur $[- 6 ; 0]$	$x \approx - 1,9999998093$		$x = - 2$
$x^2 = 2$ sur $[0 ; 3]$	$x \approx 1,414215088$		$x = \sqrt{2}$
$x^2 = 3$ sur $[1 ; 5]$	$x \approx 1,732048035$		$x = \sqrt{3}$
$x^2 = 9$ sur $[0 ; 6]$	$x \approx 3$		$x = 3$
$x^2 = 9$ sur $[- 4 ; - 1]$	$x \approx - 3,0000000954$		$x = - 3$

Application : déterminez les solutions approchées (avec 10 chiffres) des équations suivantes sur les intervalles, et concluez :

$$x^2 = 4 \text{ sur } [0 ; 6] \quad x \approx 1,999998093 \text{ au lieu de } X = 2$$

$$x^2 = 4 \text{ sur } [- 6 ; 0] \quad x \approx - 1,999998093 \quad X = - 2$$

$$x^2 = 2 \text{ sur } [0 ; 3] \quad x \approx 1,414215088 \quad X = \sqrt{2}$$

$$x^2 = 3 \text{ sur } [1 ; 5] \quad x \approx 1,732048035 \quad X = \sqrt{3}$$

$$x^2 = 9 \text{ sur } [0 ; 6] \quad x \approx 3 \quad \text{le 1}^{\text{er}} \text{ milieu C donne } f(3) = 9 \quad X = 3$$

$$x^2 = 9 \text{ sur } [- 4 ; - 1] \quad x \approx - 3,0000000954 \quad X = - 3$$